GLI ELEMENTI
TEORICO-PRATICI
DELLE MATEMATICHE PURE

DEL PADRE

ODOARDO GHERLI

DOMENICANO

PROFESSORE DI TEOLOGIA DOGMATICA
NELL' UNIVERSITA' DI MODENA

RESI PUBBLICI

DA DOMENICO POLLERA.

TOMO I.

IN MODENA MDCCLXX.

NELLA STAMPERIA DI GIOVANNI MONTANARI.

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Mathematicas ſcientias juvenes diſcere debent, turpe enim eſt, & hebetis ingenii ea ignorare, quæ ſingulis quibuſque horis neceſſaria ſunt.

Franciſcus Patritius lib. 2. de Repub.

A SUA ECCELLENZA

IL SIGNOR CONTE

GAUDENZIO VALOTTI

MARCHESE DI CASTELLARANO, S. MICHELE, E S. CASSANO; SIGNORE DI ROTELLA, E CONTE DI MONZONE; CONSIGLIERE INTIMO ATTUALE DI STATO DELLE LL. MM. II. REALE APPOSTOLICA; CIAMBELLANO, E CONSIGLIERE DI STATO DI S. A. S. DI MODENA, E PER LA MEDESIMA A. S. GOVERNATORE DELLA CITTA', E PRINCIPATO DI CORREGGIO.

LA Dedica, che il coraggio mi fo di presentare all' Eccellenza Vostra, non è, che uno scarso tributo ben giusto al vostro singolarissimo merito, e una pubblica testimonianza della profonda mia venerazione, e dell' interesse, che mi prendo per la vostra gloria conta già, e palese al Mondo mercè le eccellenti prerogative accoppiate alla Nobiltà de' Natali, con cui vi rendete a tutti oggetto di lode, di stima, e di ammirazione. E ben meritamente il possesso godete della comune considerazione, poichè la vera gloria dalla virtù misurando avete saputo coronarvi di tutti quei fregi, che il maggior lustro formano degli animi grandi, e far servire la chiarezza del sangue, lo splendor degli onori, e l' abbondanza degli agi

a 2 *di*

di sussidii, e strumenti alle peregrine doti, che luminosamente vi adornano. Nè vo' già quì io prendere per argomento delle vostre lodi l'amabile umanità vostra, le affabili, e obbliganti maniere, la grandezza dell' animo a un'esimia moderazione congiunta, cose tutte per altro bastanti a formarvi il più risplendente carattere, ma bensì, lo che è proprio di pochi, l'avere Voi unito a queste virtù un'incredibile amore del vero, il lustro della più estesa, e soda letteratura, e l'acquisto delle più sublimi, e astruse cognizioni. Senza che io le vada ora noverando, bastantemente vi celebra il Mondo peritissimo nell'Istoria non meno, che nella Metafisica, nella Politica, e in tutta la buona Filosofia. Frutto pertanto di tutte queste preziose doti dirette da uno spirito il più brillante è stato l'aver Voi saputo a un tempo stesso unire in Voi medesimo le qualità di tre gran Personaggi, di Corte, di Guerra, e di Governo. Sì: l'arte difficile della Guerra una formando delle vostre occupazioni ha aperto un ampio Teatro al vostro valore, che vi si è segnalatamente distinto, e in quel tempo principalmente, che già Colonnello proprietario d'un Reggimento d'Infanteria del vostro Nome vi portaste col Serenissimo Principe Ereditario di Modena a far campagna in Boemia nelle ultime Guerre, che devastarono l'Europa, ed assediato vi trovaste in Praga l'anno 1757. E corrispondenti essendo i vostri talenti nel maneggiare gli affari, nel governare i Popoli, e nel prestare assidua la vostra Corte a que' Sovrani, che scieglieste di servire, quale stupore, che nel fiore ancora de' vostri anni arrivaste ai maggiori onori, e dignità? Questi rari pregi pertanto superiori d'ogni lode, e di gran lunga maggiori al romore, che ne sparge la Fama, e che contrassegnandovi nato a grandi cose in trionfo per ogni dove portano celebre il vostro nome, hanno voluto anche me tra il numeroso stuolo de' vostri ammiratori, e da me vogliono pur ora colla presente Dedica un sincero attestato dell' inalterabile ossequiosa mia stima. Si degni l'Eccellenza Vostra aggradirla in questo dono, che diverrà certamente maggiore portando in fronte il vostro nome, siccome per me un motivo sarà di vanto il vedere, che coll' aggradimento della medesima la degnazione avete di contare per vostro anche l'animo di chi col più profondo rispetto si gloria di essere

Vostro Obbligatiss. Umiliss. Devotiss. Servitore
Domenico Pollera.

L' EDITORE AL LETTORE.

QUei soli, che non sono affatto digiuni delle Matematiche Discipline, possono agevolmente conoscere l' utilità, che al Pubblico apporterebbe un completo Corso delle Matematiche Pure, nel quale procedendosi con ordinato metodo dalle prime cose, e più semplici alle più complicate, e difficili, si osservasse una costante brevità, e chiarezza, e alla Teorica si unisse sempre la Pratica. Essi ben sanno, che nel solo ordine per lo più consiste la migliore istruzione, e il maggior lume; che la brevità, e la chiarezza delle dimostrazioni rende facile a chiunque il comprenderle, siccome la sempre simile serie d' idee il conservarle presenti alla memoria; e che la Pratica opportunamente unita alla Teorica fa vedere il frutto delle speculazioni, che a prima vista, non esibendo il loro uso, potevano sembrare affatto inutili, e infruttuose. Questi tre principali pregi pertanto, da' quali tanti altri largamente ne derivano, in un intero Corso, e compiuto raccolti trovandosi, egli è ben facile il persuadersi, che alcuni, ravvisando questa Scienza men difficoltosa di quello, che ne avessero di già concepita l' idea, vi si applicherebbero senza punto esitare; e che altri, essendovisi già applicati, ritrovandone lo studio più dilettevole, farebbero in più breve tempo maggiori progressi..

Ora per me tali riusciti essendo gli Elementi Teorico-Pratici delle Matematiche Pure, de' quali il Dottissimo Padre ODOARDO GHERLI mi favoriva in private, e giornaliere Lezioni, mi sono facilmente dato a credere, che tali riuscir debbano pure a chiunque altro; avvegnachè egli osservi sempre un Metodo chiaro, semplice, e naturale; dalle più piane, e note idee conduca insensibilmente lo Studioso con pari

faci-

facilità, ed evidenza alle più sublimi cognizioni; e inoltre, non mai interrompendo il rigore di dimostrare, fruttuosamente sollevi, e alletti coll' accoppiare perpetuamente la Pratica alla Teorica, come potrassi di leggieri vedere in qualunque parte dell' Opera.

Queste però sono le ragioni, che m' eccitarono consigliato da alcuni ben versati nel soggetto, del quale trattiamo, a procurare d' indurre l' illustre Autore a non privar il Pubblico d' un siffatto vantaggio; e quantunque da prima, e in seguito pure fosse alle mie istanze renitente per certi suoi privati motivi, hammi niente di meno finalmente accordato il poter pubblicar io sotto il suo nome questi Elementi: per lo che mi sono ora determinato di dar alla luce il primo Tomo, che sarà d' anno in anno susseguito da altri, i quali verranno a formare un intero Corso di Matematica Pura. In ricompensa poi di codesta mia attenzione null' altro desidero, Lettor Cortese, se non un pieno aggradimento della premura, che presa mi sono di darti un' Opera, della quale troverai tutte le parti trattate col miglior metodo, colla più grande chiarezza, e precisione.

PRE-

PREFAZIONE
GENERALE.

FRa tutte le Scienze (se la Teologia si eccettui per l' oggetto, che riguarda, e per lo scopo, cui tende) la più sublime, la più amena, e la più necessaria, non v'ha dubbio, è la Matematica. Sortì ella primogenita tra l' Opre stupende della creazione dalla mano di quel Dio, che tutto fece in numero, peso, e misura, e vidśi ben tosto brillare nella disposizione, e nell' ordine delle parti, nelle costanti leggi del Moto, nell' equilibrio delle Forze, nelle regolate vicende delle Stagioni, e de' Tempi, nel proporzionato contrasto degli Elementi, e in somma in qualunque benchè menoma parte delle infinite atte a formare con perfetto accordo il sistema di un Mondo, che è parto sorprendente di un eterno sapere. L' Uomo, che in se stesso l' Idea d' un Mondo accoppiava nel vario complesso di forze, e di moto, nella uniforme reciproca azione degli umori, nelle diverse combinazioni, e nella ammirabile concorde struttura, e armonia delle parti, in se del pari racchiudeva i tratti più fini di questa Scienza; e Iddio, che creato lo aveva, perchè a lui si sollevasse di mezzo al dominio delle create cose, in seno gliene scolpì i principj, e i semi, onde per una parte nelle intellettuali speculazioni da questo lume diretto, nelle divine fatture il Fattore ravvisando a lui si portasse, e per l' altra il sovrano soccorso ognor riconoscesse, che di tal guida, e appoggio negli usi continui della vita fornito lo aveva. Nè andò molto, che dal bisogno stimolati gli Uomini la necessità ne sentirono nell' invenzione degl' Istrumenti, e delle Arti le più indispensabili. La cultura della Terra per procacciarsi il vitto, le vesti, e le abitazioni per difendersi dalle intemperie delle Stagioni formarono le prime loro occupazioni. Le diverse produzioni, che in alcuni luoghi abbondavano, in altri mancavano, venendo in seguito col mezzo del Commercio ad accostare que' popoli, che l' eccedente numero forzati aveva a separarsi, l' origin dettero all' arte di navigare, e di numerare, tanto necessaria nell' esatta giustizia de' contratti, e nel fedele registro del dato, e del ricevuto. Ma perchè il nodo più stretto della

So-

Società prometteva loro maggiori soccorsi, raunatisi in numero i popoli s' applicarono in prima a inventare certe misure, e fissare certe leggi chiamate con voce greca Geometria (piccolissima parte di quella, che in oggi ne conserva il nome), a fine di determinare i proprj terreni, e stabilirne i confini; poscia si videro con felice successo gettare i principj della Civile Architettura, applicando la mano alla fondazione delle Città; e siccome a ciò condotti li aveva il comune impegno di guardarsi, e difendersi da' nemici, pensarono a fortificarle contro gli assalti con Fosse, con Torri, e con ordinato recinto di Muri onde, o assicurarsi dalle altrui sorprese, o per lo meno porsi in istato di sostenerne con vantaggio gli sforzi: E quì fu, dove l' arte, e l' ingegno fece di se vaga pompa, e nella invenzione delle Macchine, e nella scelta, e fortificazione de' posti, e nell' ordine, e distribuzione degli Accampamenti, e nella regolata forma delle difese, e degli Attacchi. Stabiliti in questo modo gli uomini nella Società, nel Commercio, e nella pace, le loro cure rivolsero a richiamare a miglior giorno le primiere loro invenzioni e con perfezionarne le operazioni, e con facilitarne la pratica, e con promoverne ulteriori scoperte: Sopra tutto però facendo servire la fecondità de' principj già stabiliti alla contemplazione della Natura, ubbidienti godettero vedersi nelle loro ricerche l' Acqua, il Fuoco, l' Aria, i Venti, il Lume, i Colori, e l' Ombra per sino. Quindi preziosi frutti delle ingegnose loro speculazioni furono la Pittura, la Musica, la Scultura, l' Idraulica, la Gnomonica, l' Astronomia, l' Ottica, la Cosmografia, e la Fisica tutta, che senza il soccorso delle Matematiche giammai sarebbero giunte a quel grado di perfezione, cui in oggi c' è dato vederle felicemente promosse. Da tanti viaggi pertanto mossi i primi Soggetti della Repubblica con somma gelosia s' applicarono a rendersi tutto proprio questo studio, per lo che niuno al grado montava di Pontefice, o Sacerdote tra gli Egizj, niuno veniva salutato Re tra i Macedoni, e i Persiani, se ne' di lui alti Misteri non erasi da prima aperto il sentiero. Gli Egizj però fra tutte le Nazioni in queste Scienze si segnalarono, ed essi i primi sono dopo il Diluvio, cui dobbiamo esserne grati al riferire di Marco Manilio nel libro I. dell' Astronomia, ai quali, se crediamo a Gioseffo nel libro VIII. delle Antichità Giudaiche, le comunicò Abramo tra' Sacerdoti da Faraone annoverato 1961. anni avanti Gesù Cristo. Dall' Egitto poi trasferite furono nella Caldea, indi nella Grecia per opera di Talete Milesio nato nell' anno I. dell' Olimpiade XXXV. celebre

bre non meno per avere predetto il primo le Ecclissi del Sole, e della Luna, che per le sue osservazioni sul levare, e tramontar delle Stelle, e su gli Equinozj, e i Solstizj, per la descrizione del Triangolo, e del Circolo, per la contemplazione delle linee cominciate da Euforbio Frigio, e per avere all' uso ridotta la proporzione dell' Ombre nella misura delle Piramidi d' Egitto: Ma più di tutto celebre per la Setta Jonica, di cui fu Capo, dalla quale fra tanti altri sortirono i tre gran Geometri, Anassimandro, Anassimene, ed Anassagora di Clazomene, de' quali il primo aggiunse ai ritrovari del suo Maestro l' Invenzione della Sfera secondo Plinio, e dell' Orologio Solare al riferire di Diogene Laerzio, e andò glorioso di avere il primo figurato la Terra sopra di un globo, d' averne determinato il circuito, d' avere fissati i punti degli Equinozj, e de' Solstizj, e d' avere scoperta l' obliquità del Zodiaco; il secondo ci lasciò il Quadrante Solare, frutto delle sue meditazioni sulle proporzioni della Luce, e dell' Ombra; e il terzo disputò avanti ogn' altro degli Abitatori della Luna, scrisse sulla Quadratura del Circolo, e scuoprì il Lume derivato nel corpo lunare. Tutti questi però di molto sorpassò nelle sue scoperte il famoso Pitagora accrescendo, e perfezionando la Scienza de' numeri, trattando delle quantità incommensurabili, scuoprendo la quantità della somma degli angoli nel Triangolo, e l' eguaglianza del quadrato dell' Ipotenusa ai quadrati degli altri due lati, lo che, per l' uso che ottiene in tutta la Matematica, è stato una delle più interessanti scoperte. A Pitagora successe Ippocrate Chio, cui dobbiamo la quadratura delle Lunule, e la prima soluzione del problema della duplicazione del Cubo, cui dette origine secondo Eratostene il Monumento di Glauco, e secondo altri la risposta del consultato Oracolo di Delo. Quasi nel tempo istesso fiorì il sommo Filosofo Platone, cui tanto debbono le Matematiche, e la Filosofia col loro soccorso illustrata, e ampliata: dette egli una semplicissima soluzione al Problema Deliaco, e cominciò a trattare delle Sezioni del Cono, Opera accresciuta di poi da Archita Tarentino di lui contemporaneo, il quale fabbricò le Ipotesi Astronomiche, e trattò altri Problemi trasmessici da Laerzio, e da Vitruvio. Tra i Discepoli di Archita merita particolar menzione Eudosso di Cnida ultimo fra gli antichi Pitagorici, il di cui nome a noi è pervenuto colle prime Idee sistematiche sul moto dei corpi celesti colla descrizione delle Carte Geografiche, a cui ridusse il globo di Anassimandro, rendendone in Grecia l' uso comune, e colla dottrina delle

 pro-

proporzioni raccolta nel quinto libro da Euclide, il quale ordinò in un ſol Corpo quanto di elementare era ſtato ſcritto dai Geometri, che l' avevano preceduto, lo che pure ſul fine del quarto Secolo dell' Era Criſtiana eſeguì Pappo in otto libri intitolati Collezioni Matematiche, ſiccome Apollonio Pergeo in otto libri unì, ed eſpoſe quanto avevano ſcoperto ſu le proprietà delle Sezioni Coniche Ariſteo, Eudoſſo, Menechmo, Conone, Traſideo, e Nicotele. Più oltre d' ogn' altro le ſue ricerche avanzò il ſommo Archimede di Siracuſa, il di cui ſpirito inventore lo ha reſo a tutta la poſterità oggetto d' ammirazione; e d' encomio: Trattò egli la quadratura del circolo, e felicemente vi giunſe per approſſimazione; con ſomma penetrazione ſcriſſe della Sfera, e del Cilindro, delle Spirali, delle Conoidi, e delle Sferoidi; inveſtigò il centro di gravità nelle figure piane; quadrò la Parabola, e la gloria riportò d' avere con profonda ſagacità in una piccola sfera i moti celeſti rinchiuſi. Sonoſi in ſeguito reſi noti colla ſua Concoide Nicomede, Diocle colla Ciſſoide, e colla Quadratrice Dinoſtrato. Tali erano i principj, e i felici progreſſi, coi quali avanzavanſi queſti Studj, quando nel quinto Secolo inondando per ogni dove i Barbari colla diſtruzione dell' Impero d' Occidente, tra il furore dell' armi, e l' univerſale deſolazione, che ſeminata aveva tra i Latini, e i Greci una profonda ignoranza, incontrarono l' ultimo fato le lettere, e principalmente le Matematiche: (e queſto fatale periodo che mentre per noi era tempo d' ignoranza, e di tenebre, fu per gli Arabi di ſapere, e di luce, tra' quali fiorirono valenti Aſtronomi, e gran Geometri, cui ſembra doverſi accordare le prime ſcoperte dell' Algebra) durò fino al XIV. Secolo, nel quale cominciarono gli uomini a ſollevarſi ſopra ſe ſteſſi, gli occhi ſchiudendo dalla perniciosiſſima cecità, in cui erano ſtati fino allora quaſi tutti miſeramente avvolti. Le prime loro occupazioni però rivolte erano ſoltanto a tradurre, e comentare l' opere degli Antichi, e queſta Scienza tra le lor mani videſi poco, o nulla avanzare, fino a che nel ſettimo decimo Secolo andò ſuperba la Francia d' avere prodotto il genio felice dell' immortale Carteſio, il quale coll' applicazione dell' Algebra alla Geometria l' origine fiſsò, e il vaſto campo ci aprì ai ſorprendenti progreſſi, e alle più ſublimi ſcoperte, che ſono ſtate fatte dappoi. Cominciò egli da quel termine la ſua Geometria, cui eranſi arreſtati gli Antichi, dando una completa generale ſoluzione al Problema accennato da Pappo nel principio del libro VII. delle ſue Collezioni, il quale di ſcoglio aveva ſervito ai più celebri Geo-

Geometri Euclide, Apollonio, Aristeo, ed Eratostene. Trattavasi in questo Problema di determinare il luogo di un punto, dal quale ad alcune rette date di posizione conducendosi altrettante rette in dati angoli, il prodotto nato dalla moltiplicazione di una parte di queste linee al prodotto stesse nato dalla moltiplicazione delle rimanenti in una data ragione, lo che eseguì egli con somma facilità, e chiarezza nel breve tempo di cinque, o sei settimane, come egli stesso scrive al Padre Mersenno nella lettera LXXI. al Tomo II.: E questo è il maggiore passo, che dopo Archimede fatto abbia la Geometria. Frattanto mentre Cartesio i fondamenti gettava, e stabiliva di una più sublime Dottrina, il Padre Bonaventura Cavallerio col suo Trattato degl' indivisibili andava in parte i materiali preparando alla Geometria dell' infinito, che sorger ben tosto si vide dalle stesse leggi del Cavallerio mediante la sola sostituzione di Parallelogrammi, e di Solidi infinitamente piccoli alle di lui linee, e piani, mercè cui fu facile il determinare la superfizie di certi spazj curvilinei, la rettificazione di certe Curve, la misura di certi Solidi, e i centri di gravità degli uni, e dell' altre, lo che era stato per l' avanti totalmente ignoto, e da alcuni, benchè valenti Geometri, creduto anche impossibile. Tra tanti, che a codeste ricerche lo studio rivolsero, si distinse il Padre Gregorio da S. Vincenzo della Compagnia di Gesù nel suo Trattato *De Quadratura Circuli, & Hyperbolæ;* Il Fermazio coll' applicazione delle differenze al metodo delle Tangenti; ed il Barow, che coll' uso del piccolo Triangolo differenziale all' ultima sua perfezione lo ridusse. Siccome poi i piani, e i solidi nascenti, da' quali suppongonsi risultare le superfizie, e i corpi, con certe leggi vanno crescendo, e decrescendo, onde il ricercarne la misura si riduce a determinare la somma di una serie infinita di quantità crescenti, o decrescenti, però le loro mire diressero ben tosto i Matematici al modo di sommare le serie, e questa parte fu trattata dal Wallis, dal Brouncker, dal Gregorio, dall' Ugenio, e ampiamente per ultimo dal dottissimo, e sommo Geometra Padre Riccati della Compagnia di Gesù. In questo stato erano le cose; nè più altro restava al compimento dell' Opra, che svolgerne le ultime idee, quando il Sig. Leibnitz pubblicò il primo nel 1684. le regole del calcolo differenziale, che il Sig. Newton famoso per tante altre opere aveva già per parte sua ritrovate. Queste regole ancor nascenti, e non peranche aperte alla intelligenza di tutti furono in seguito sviluppate, e dimostrate dagl' illustri Fratelli Bernoulli, e Giovanni dopo qualche

anno il metodo aggiunse di differenziare le quantità esponenziali. Ed ecco le importantissime scoperte, con cui nel solo giro di un Secolo sorpassati si sono tutti gli sforzi degli antichi mediante una invidiabile gara tra' Geometri, e un comune impegno pel progresso delle scienze, e dell' arti. Questo impegno, che aveva in buona parte occupati anche gli Antichi stante lo stretto vincolo, con cui vanno unite alle Matematiche non poche Scienze, e la Fisica principalmente, siccome lo appalesa l' uso, che ne ha fatto Archita di Taranto nell' invenzione della Vite, delle Taglie, della Leva, e d' altre macchine; Eudosso di Cnida nella fabbricata Ipotesi de' circoli concentrici, ed eccentrici, su i quali per tanto tempo sonosi fatti rivolgere i Corpi celesti; Archimede nel suo Opuscolo degli Equiponderanti, e insidenti nell' umido; Pitagora nel Sistema de' Cieli, che dal ristauratore Copernico è poi stato chiamato Copernicano; nell' Ottica, e Catottrica Euclide; nelle macchine Idrauliche Erone. Questo impegno, dissi, cominciò a svegliarsi dopo avere languito per tanti secoli sotto la barbarie, e le fazioni colla Diottrica, e colle Meteori di Cartesio, che rinnovò l' antico costume della Grecia di unire allo studio della Filosofia quello della Geometria, e delle altre parti della Matematica, acciocchè servisse di base a tutto l' edifizio delle Scienze: Egli fu, che coll' amor del vero assistito dalla evidenza matematica cominciò a dissigillare agli occhi de' saggi il gran libro dell' universo del pari intelligibile, che fisico, e col proprio esempio stimoli aggiunse alle altrui ricerche, ond' è, che in oggi godiamo vederlo il più letto, e il più stimato, e quelli soltanto riportare il nome di Filosofi, che non tra vane specolazioni, come già un tempo, per lo più delirando, ma colla investigazione della natura il regno della Fisica per mezzo di sperienze, e sode dimostrazioni, sanno estendere, e ampliare. Certamente, se a imitazione di Cartesio promosso non avessero questo felice accoppiamento i Filosofi, noi in oggi debitori non saremmo della Centrobarica al Padre Guldino della Compagnia di Gesù; della Teoria dell' accelerazione al Galileo; della misura della gravità Atmosferica al Torricelli; del principio della composizione delle forze a Stevino, che il Sig. Varignon ha di poi felicemente applicato all' equilibrio delle macchine; delle regole de' moti ne' corpi non elastici al Wallis, e negli elastici al Wren; della dottrina delle forze centrali nel cerchio all' Ugenio; delle regole della resistenza de' solidi al Leibnitz, che l' Ugenio ha poscia rese universali; dell' estensione delle forze centrali alle curve, e al sistema del Mondo

do

do al Newton; e finalmente delle cose più sublimi nella Teoria Idraulica al Newton, al Varignon, all' Ermanno; e della misura dell'acque correnti al Guglielmini, mercè cui o disseccando terreni troppo umidi, e pantanosi, si è resa all' aria de' circonvicini luoghi una perfetta salubrità, o mediante una opportuna deviazione di qualche fiume innaffiandone altri, d' aridi, ed infecondi sonosi resi fertili, ridenti, e deliziosi, e per tal modo si è veduta baldanzosa la mano dell' uomo costringere, e forzare la natura stessa cambiando climi, e variando secondo i bisogni le disposizioni de' luoghi. Ed ecco reso evidente il perchè fino dalla più rimota antichità si è avuta una estimazione grandissima delle Matematiche. I Filosofi, e i Platonici principalmente, conoscendone necessario il possesso allo studio della sapienza, niuno ammettevano alle loro dispute, se prima iniziato non era ne' misterj della Geometria, come viene marcato da questa Inscrizione ὄδεις ἀγεωμέζητος ἐιςίτω, che leggevasi su la porta delle loro Sale Accademiche: Bisognava per entrarvi avere sollevato lo spirito dal senso, e averlo reso suscettibile del rigoroso commercio della verità, bisognava avere disposto l' animo alla contemplazione, al raziocinio, e alla cognizione de' più ascosi misterj, nè altra cosa si giudicò più propria a tale effetto, che il sussidio di una scienza, che sola conta il vantaggio di giungere al vero senza mescolanza d' incertezza, e d' errore. Quindi è, che solevano i Greci, appò de' quali tanto fiorirono le Scienze, e le belle Arti, erudire su' primi anni i Giovinetti nelle Matematiche al riferire di Platone nel libro VII. della Repubblica, quale costume è poi stato approvato da Quintiliano nel libro I. delle Instituzioni al Cap. XVIII.; da Patrizio nel lib. II. della Repubblica al Cap. II.; da Vossio negli Opuscoli *de ratione Studiorum*, e da quanti altri hanno trattato della Istituzione de' Giovani, mentre al dire di Platone in Filebo la Matematica alletta, eccita, e sforza l' intelligenza, la raziocinazione, la contemplazione, e la verità, cioè a dire dona alla mente un certo lume, che l' idee pulisce, e raffina, e una tale giustezza di discorso, che al possesso delle più astruse verità sicuramente conduce. Che però a saggia imitazione de' Greci dovrebbe farsi massima comune di riguardare l' educazione de' Giovani come sommamente imperfetta senza il sussidio di queste belle, e solide cognizioni, che sole possono bastare a formare il carattere d' Uomo, come abbiamo da Aristippo Socratico, il quale trasportato dal naufragio ai lidi di Rodi, al vedere segnate sull' arena figure matematiche, rivolto ai Compagni: Siamo sicuri, disse,

poi-

poichè qui io ſcorgo veſtigia d' Uomini. Ben è vero però, che anche ai dì noſtri per aſſai lodevole indiſpenſabile coſtumanza ſogliono, o almeno dovrebbero i giovani nel primo ingreſſo alle Filoſofiche didiſcipline in queſti Studj iniziarſi, ed è vero altresì, che una gran parte vi ſi moſtra inclinata, o ſia per l' eſempio di tanti eccellenti Uomini, che in eſſi con comune vantaggio, e con pari gloria diſtinti ſi ſono, o ſia per la neceſſità, che dappertutto ſentono predicarſene, nientedimeno pochi, anzi pochiſſimi ſi annoverano, che nel ſeno di queſt' ampio Regno con franco piede s' inoltrino. E' certo, che le Matematiche avendo per obbietto la quantità conſiderata d' una maniera vaga, e indeterminata, come che ſeparata, e aſtratta da ogni materia ſenſibile, eſigono una mente penetrante, e facile a ſollevarſi a coſe puramente intelligibili, per lo che può parere dover eſſere di pochi il penetrare ne' loro receſſi, e gli alti loro miſteri ſcuoprire; pure io ſon d' avviſo richiederſi una tale penetrazione ne' progreſſi di queſti Studj, non ne' principj, co' quali anzi viene a formarſi, e però non eſſere queſto l' oſtacolo, che arreſti alla maggior parte il paſſo, e abbandonare gliene faccia l' impreſa; imperocchè oltre l' avere l' anima in ſe ſteſſa quelle ragioni eterne, ſecondo le cui leggi l' Univerſo s' aggira, e conſeguentemente eſſere per ciò naturalmente inclinata a queſta Scienza, egli è non men fuor di dubbio, che proponendo eſſa principii, e ragioni, delle quali facilmente ſenza biſogno di preventive cognizioni, da cui dipendano, ſe ne formano chiare, e diſtinte le idee, e conducendo paſſo paſſo, come per luminoſo ſentiero, l' intelletto d' una in un' altra verità per mezzo di una rigoroſa concatenazione di evidenti dimoſtrazioni, lo accuiſſe perciò, e le di lui operazioni di sì fatta maniera dirige, che con giuſtezza di diſcorſo, con preciſione di penſieri, con eſtenſione di ſpirito lo ſtraſcina, per così dire, a concetti inſenſibili, e univerſali, co' quali ſottile ſi rende, e facile al vero ſapere, che l' eſſer ſuo dalla certezza deſume. Ora ciò premeſſo ſembrami di potere francamente decidere, che le Matematiche non già richiedono da prima, ma anzi ſanno per ſe ſteſſe una mente perſpicace, e penetrante, donano un felice diſcernimento, un certo ſpirito d' ordine, di preciſione, di eſattezza, una elevazione di genio propria a rendere abile a tutto, una ſomma facilità d' afferrare d' un ſol punto di viſta le coſe più aſtratte, e le più complicate, e però a quella perfezione la portano, che deſiderare bensì, non già altronde ſperar ſi poteva: per lo che neceſſariamente biſogna convenire, che altra ſia la cagione, da cui abbiano origine i tenui

nui progressi, che in queste discipline comunemente si fanno, e questa cagione vuolsi ripetere o dalla mancanza d'esperto paziente Maestro, che non sempre a voglia, e comodo degli studiosi ritrovasi, tanto più, che i grand' uomini non sanno, o non vogliono discendere a uniformarsi alle idee de' principianti, ripetendo di bel nuovo quella carriera, che da gran tempo si lasciarono per lungo tratto alle spalle; oppure, lo che è più funesto, dal non esservi presentemente un' opportuno Corso elementare, che dalle più semplici, e note idee cominciando, conduca di mano in mano ordinatamente, e con chiarezza dalle cognizioni più piane alle più composte lo spirito, e faccia egli solo di Maestro le veci. Non mancano, è vero, in questa materia opere di eccellenti Scrittori, i quali o le Matematiche nella loro estensione abbracciando, o separatamente qualche parte a illustrare imprendendo, hanno lodevolmente per quanto permettevano le scoperte fatte fino ai loro tempi, a pubblico bene le proprie fatiche impiegato. Ma per quanto spetta ai Trattati particolari, che infiniti si contano d'infiniti Autori, non possono questi certamente servire al bisogno di un giovine, mentre dovendosene unire insieme varj di varj Autori per formarne un sol corpo, non potrà mai tale aggregato essere all' uopo opportuno, avvegnachè in tutto manchi della unità dello spirito, dello stesso processo d'idee, del costante ordine delle materie, e della sempre eguale chiarezza in questi studj tanto necessaria, cose tutte, che moltissimo possono imbarazzare la mente de' principianti, e tanto più crescerà l'imbarazzo dal non sapere quale scielta debbasi fare tra gli Scrittori, e quale tra questi diversi Trattati prender si debba pel primo, quale al primo sostituir per secondo, affine di ordinatamente procedere, e con regolata serie di cognizioni agevolarsi il cammino. Quanto poi agl' intieri Corsi elementari, ne abbiamo veramente parecchi, e tali sono tra gli altri quello di Pietro Erigonio, del Padre Gasparo Scotti della Compagnia di Gesù, del Padre Claudio De Chales della stessa Compagnia, e di Cristiano Wolf, tra' quali i due ultimi accoppiando al rigore di dimostrare degli Antichi la pratica, godono il vanto di condurre con piacere lo studioso alle più sublimi verità: ma e l'uno, e l'altro trovasi mancante dei molti metodi scoperti dappoi, lo che fa, che non godano al presente quel pregio, che li distinse in passato; oltre di che nell' ultimo, che pure passa pel migliore, le cose vi sono trattate troppo ristrettamente, onde il più delle volte non può un principiante approffittarne per se stesso, e applicarvisi senza bisogno di Maestro, che gli spieghi, e sminuzzi di quando in quando i passi, e altre necessarie notizie soggiunga, che all'

ordi-

ordinata intelligenza pur si richiedono, e che dall' Autore, il quale tante cose erasi prefisso di trattare, non sono state con tutta l'estensione esposte. L' utilità pertanto, che giova sperare da un' intero, piano, e ordinato Corso, in cui accoppiandosi la teorica alla pratica, niuna resti a desiderarsi delle scoperte fatte finora, è stato il motivo, da cui sonomi lasciato indurre a permettere, che si diano al Pubblico i miei scritti, che in occasione d' insegnare privatamente a diversi ho con particolare studio ordinati pe' principianti, accomodandomi alla tenuità delle loro idee, e conducendoli insensibilmente dalle più facili alle più sublimi verità, di maniera che ciascuno possa applicarvisi, e imparare da se stesso, lo che pure tanti cercano, ma non possono effettuare per mancanza di cotai libri, che di Maestro in luogo gli siano. Per lo che mi si perdonerà l' essere diffuso, e prolisso, essendo ciò indispensabile a chi vuol condurre con chiarezza gli studiosi per l' arduo cammino di questa sublime facoltà; quantunque non devesi giudicare prolisso chi espone le cose in maniera da condurre speditamente, e senza intoppo il Lettore al termine, ma bensì quegli (se non in realtà, certamente quanto all' effetto) che col trattarle troppo succintamente gli fa perdere di tratto in tratto il tempo a meditarne i passi, e il più delle volte ancora infruttuosamente. Vi sono, è vero, alcuni spiriti penetranti, che le difficoltà di primo punto afferrano, ma altri vi sono ancora più tardi, e n' è molto maggiore il numero, cui debbonsi uberiori soccorsi; che però se potrà parere ai primi trattata la materia troppo diffusamente, certamente non lo sembrerà ai secondi, pe' quali principalmente devesi scrivere, e perchè il loro numero è superiore, e perchè nella applicazione più fissi, e costanti, facendo per lo più maggiori progressi, meritano ancora d' essere di più assistiti, laddove i primi appunto perchè più acuti, e ingegnosi sono eziandio più mobili, e incostanti. Per rendermi ancora più chiaro, e intelligibile ho stimato a proposito lo scrivere in Italiano, essendo ben certo, che più facilmente s' intendono i modi di dire, e le frasi, e si penetra lo spirito di quella lingua resa famigliare fin da fanciullo, di quello sia di qualunque altra, che collo studio siasi appresa, di cui conseguentemente non puossi avere eguale possesso: tanto più, che questo mio partito lo vedo comunemente approvato dalle più colte Nazioni, le quali usano scrivere nel patrio loro linguaggio.

IL

IL CALCOLO
DELLE QUANTITA'
DETERMINATE.

PREFAZIONE.

SE alcuna parte v' ha di Matematica, che per l' eccellenza, e dignità sua all' altre tutte debbasi preferire, ella è a buona equità l' Aritmetica, fra le arti liberali, e le Scienze speculative al dire di Platone (1) la più nobile, e quasi divina, in quanto che di niun' altra disciplina abbisognando, in tutte quasi ha parte, e seggio; onde è, che a ragione da Francesco Patrizio (2) viene chiamata necessaria a quasi tutte le Arti, e da Giovanni Grammatico (3) alle altre Scienze viene anteposta, come quella, che a loro serve di scorta, e guida per tracciarne fortunatamente l' acquisto. Di una sì profittevole, e vantaggiosa scoperta da diversi Autori varj, e diversi pure se ne fanno gl' Inventori; o siane la ragione, perchè tutt' ora incerto sia da chi debbasi riconoscere; o che, come nell' altre scienze, e arti è per lo più accaduto, non essendo alla sua perfezione, che per mezzo di molti, pervenuta, diversi perciò fatti se ne siano gl' Inventori, secondo che da loro in varii tempi è stata di mano in mano abbellita, e accresciuta. Quindi al riferire di Tito Livio (4) ella è stata ritrovata da Minerva: Secondo Aranasio (5), e Platone (6) da Palamede: Dagli Arabi, se prestiam fede a Giorgio Purbachio (7); e finalmente giusta Polidoro Virgilio, e Diodoro Siculo dagli Egizj, da' quali apparolla Pitagora, come narra Isidoro (8), Volaterano (9), Origene (10), e Beda (11), di sorta tale applicandovisi, che per di lei mezzo alla cognizione sollevossi delle celesti cose. Ciò non pertanto in una così varia disparità d' opinioni più probabile pare, che si renda, aver ella avuto l' origine presso i Tirii, e i Fenicii, come fra gli altri attesta Strabone (12), dalla introduzione del commercio, a cui prima d' ogn' altra Nazione la Colonia Tiria applicossi, e felicemente lo introdusse. Ma siccome appo gli altri popoli cominciò poscia a dilatarsi il Commercio, così passò ella pure dall' Asia in Egitto per testimonianza di Giosesso, dove fu egualmente coltivata, o perfezionata, di maniera che la dottrina de' numeri una gran parte veniva a formare della Filosofia, e Teologia degli Egizj, stante le tante maraviglie da esso loro riferite intorno all' unità, e al ternario, e altresì circa i numeri 4, 7, 10 ec. come puossi vedere appresso l' eruditissimo Padre Kircherio della Compagnia di Gesù (13), onde Pitagora non dubitò d' asserire, che la natura de' numeri pervade tutto l' Universo, e la loro cognizione è la cognizione medesima della divinità. Dall' Egitto ella quinci fu trasmessa ai Greci, da' quali con notabile accrescimento la ricevettero i Romani. Fino a questo tempo però era ella molto mancante, avvegnachè si restringesse alla considerazione delle varie divisioni de' numeri, come appare dai Trattati di Nicomaco, che scrisse nel terzo secolo, e di Severino Boezio, il quale visse nel sesto secolo. Troppo lungo però sarebbe il voler quì ridire quanti impegnati si siano ad ampliarla, e quant' opra in essa le Nazioni tutte abbiano impiegata, bastando osservare il grande vantag-

c 2

(1) *Nell' Epinomide.*
(2) *Nel lib. 2. dell' Instit. della Repub.*
(3) *Nel lib. 1. della Fisica.*
(4) *Nel lib. 7. della prima Decad.*
(5) *Nell' Orazione adversus gentes.*
(6) *Nel Dialogo 7. della Repub.*
(7) *Nel suo Algoritmo.*
(8) *Nel lib. 3. delle Etimologie.*
(9) *Nel lib. 33. della Filologia.*
(10) *Nel lib. 4. cap. 2.*
(11) *Nel lib. de Computo.*
(12) *Nel lib. 7.*
(13) *Nell' Oedip. Egyp. Tom. 2. par. 2.*

taggio. che da' lei ne risulta, per potere a un tempo istesso ravvisarne ancora il comune impegno: E però lasciando da parte i Trattati di Psello tradotti dal Greco da Gulielmo Xilandro; di Jodoco Willichio; di Giordano publicati da Fabro Stapulense con un comentario; di Michele Itiselio, e di Nicolò Tartaglia, avvegnacchè tali Autori lasciata soltanto ci abbiano la pratica dell' Aritmetica; osserverò essere ella stata unita alla Teorica, e anche in molte parti accresciuta da Barlamo Monaco; da Maurolico (1); dall' Henischio (2), e dal celebre P. Andrea Tacquet della Compagnia di Gesù (3). E ben a ragione tanti illustri Uomini gran parte delle loro fatiche hanno impiegata per lasciarci una intera dottrina del Calcolo numerico, conciosiacosachè in qualsivoglia affare civile, e dimestico a chiunque necessaria non tanto ella sia, ma di più all' altre scienze l' ingresso ci apra fortunatamente, e faciliti: Per lo che diceva Platone (4): Hai tu considerato, che gli uomini di natura computisti pajono acuti, per dir così, a tutte le dottrine; anzi se alcuni d' ingegno più pigro a questo studio si saranno dati, e in esso esercitati, se niun' altra utilità ne avranno tratta, ciò però avranno tutti conseguito, di divenire cioè più acuti di prima; e finalmente conchiude essere quegli facile, e idoneo all'altre scienze, che sa numerare: Per lo che voleva egli (5), che fosse dicevole ordinazione il por legge, o persuadere a coloro, che sono per esercitare le cariche della Città, che si diano alla scienza del contare, nè quindi si dipartano senza esser prima colla mente pervenuti alla contemplazione della natura de' numeri, affine poscia di convertire facilmente l' animo dalla generazione alla verità, e all'essenza. Di fatto e chi non vede starsene questa in guisa tale fra tutte le arti, e scienze umane, che se essa sola via si levasse inetti a tutto gli uomini si renderebbero? Del che ben si mostrarono persuasi gli Egizj, i quali per testimonianza di Alessandro d'Alessandro (6), e di Diodoro Siculo (7) la prima cura, e diligenza collocavano nell' instituire, e addestrare i giovanetti nell' arte di numerare, lo che pure esattamente osservarono i Greci, ed i Romani al riferire d' Orazio (8). Ora questa scienza tanto da tutti sempre stimata, e coltivata, siccome negli affari, e usi della vita il primo luogo esige, e si arroga, così pure il primo posto si assume nelle Matematiche: Onde è, che a fine di ordinatamente procedere ho stimato opportuno il dare principio agli elementi da questo calcolo, che quì ho trattato con tutta l'estensione, di cui è suscettibile relativamente all'uso, che ottiene nell' altre parti di Matematica, così che niuna cosa resti a bramarsi. Non istarò qui a dare il dettaglio delle materie esposte, nè di ciò, che può esservi di particolare, mentre ognuno dallo scorrere anche alla sfuggita il libro potrà facilmente rilevarlo. Dirò soltanto, che m' è piacciuto, a differenza di quanti hanno trattato dell' Aritmetica, di accoppiare alle regole Teoriche gli Esempj particolari desunti per lo più da cose fisiche, e ciò per due ragioni; la prima affinchè questi esempi particolari servano allo studioso di lume per conoscere, e distinguere al bisogno di quali regole ne' diversi casi debba far uso, lo che non così facilmente può rilevare dagli esempj generali, onde è, che per lo più dopo avere apparate le regole trovasi imbarazzato nel farne all'occorenza l'applicazione: La seconda acciocchè nell' apprendere il calcolo s'acquisti ancora tant'altre belle cognizioni fisiche, qualora non

ne

(1) *Opuscula Mathematica stampati nel 1575.*
(2) *Arithmetica perfetta stampata nel 1609.*
(3) *Theoria, & praxis Arithmetices,*
(4) *Nel Dialogo 7. della Repubblica.*
(5) *Nello stesso.*
(6) *Nel lib. 2. cap. 25. de' dì geniali.*
(7) *Nel lib. 2. cap. 2.*
(8) *Nell' arte Poetica.*

ne fosse al chiaro; nè importa, che egli sia al fatto delle cose filosofiche per poterle intendere, mentre nello sciogliere questi Problemi ne svolgo di maniera tutte le idee, che niuna cosa atta a movergli difficoltà possa incontrare. Poichè ho avuto in vista soltanto il necessario, ho stimato superfluo il far parola di tante cose, che allo scopo prefisso non conducevano, come sarebbe dell' età delle figure numeriche, del che ha trattato Friderico Weidlero (1); dei diversi metodi di numerare, lo che si può vedere presso Giorgio Henischio (2), e Cristoforo Vellnagel (3); conseguente ho ommessa l'Aritmetica binaria inventata dal Leibnitz (4), che per altro sembra la stessa di quella usata già da 4000 anni dai Chinesi, e lasciata in enigma da Fohi fondatore del loro Impero, e delle loro scienze, di cui distesamente ne ha spiegato i principj, e la pratica Gioseffo Picano (5), anzi il Sig. Dangicourt (6) l'ha applicata alle Progressioni Aritmetiche, e sul suo piede M. Lagni un nuovo sistema di Logaritmi ha proposto. Per la stessa ragione ho passata sotto silenzio l'Aritmetica Tetratica, della quale nel numerare uso faceva un antico popolo della Tracia al riferire di Aristotele (7), e di cui ci ha lasciato un Trattato Erardo Weigelio. Molto meno è stato mio pensiere dare alcuna notizia dei quadrati magici, de' quali ha scritto M. Frenicle (8), indi più perfettamente M. Poignard (9), e finalmente M. de la Hire, il quale sembra averne data una poco meno, che compita Teoria: Così pure ho giudicato cosa affatto aliena l'applicare ai giuochi la dottrina del calcolo, lo che ha fatto M. Ozanam (10), e quanto ai giuochi d'azzardo l'Huygens, il Moivre, il Bernoulli, ed Montmaur. Veramente non sembrava cosa lontana affatto dall' instituto il riferire l'uso d'alcuni strumenti inventati a facilitare le operazioni Aritmetiche, come sono le Ossa del Barone Giovanni Nepero (11); le verghe sessagesimali di Samuele Reyer (12), i due strumenti del Cavaliere Samuele Moreland (13); le Macchine del Leibnitz (14), di Pascal, di M. de l'Epine, di M. de Boitissendeau, e del Sig. Giovanni Poleni (15). Ma considerando per una parte, che tali strumenti potevansi a dirittura da chicchessia osservare ne' riferiti Autori, e per l'altra, che uno già impossessato del calcolo, al che tendono le nostre mire, non ha punto bisogno di tali strumenti, mi sono determinato di lasciarli da parte per non impiegare lo studioso in cose curiose piuttosto, che necessarie. E questo è quanto nel presente Trattato m'è sembrato conveniente di fare preventivamente avvertire.

IN-

(1) *De Caracteribus numerorum vulgaribus, & eorum ætatibus.*
(2) *De numeratione multiplici veteri & recenti.*
(3) *Numerandi methodi, sive Arithmetica omnes possibiles.*
(4) *Negli Atti dell' Accademia delle Scienze agli anni 1741, 1726, 1703.*
(5) *Arithmeticus perfectus, qui tria numerare nescit.*
(6) *In Miscel. Berolinensibus pag. 336.*
(7) *Nei prob. alla sez. 13.*
(8) *Nell' anno 1693.*
(9) *Nell' anno 1705.*
(10) *Recreations Mathematiques.*
(11) *Si veda l' Aritmetica del Wolf.*
(12) *Nell' anno 1683.*
(13) *Londra l' anno 1673.*
(14) *In Miscel. Berolin. pag. 394.*
(15) *Nelle Miscel. Venete l' anno 1709.*

INDICE DELLE MATERIE.

posto

ART.

CAPO

CAPO I.

Delle prime nozioni, e operazioni del Calcolo

ARTICOLO I.

Della Quantità, e delle figure, che per calcolarla si usano.

1. Oichè il calcolo versa circa la quantità, egli è necessario il premettere che cosa ella sia. Quantità pertanto dicesi tutto ciò, che è capace d'aumento, e di diminuzione, o sia che è suscettibile di più, e di meno; e tale è lo spazio in lungo, largo, e profondo; il Tempo; il Moto; le Forze; le qualità sensibili della Durezza, del Peso, del Freddo, del Caldo, dei Colori, della Luce ec.

2. Egli è da osservarsi, che per rapporto alla quantità noi altro non sappiamo, se non che una cosa è grande rispetto ad un'altra, ovvero è piccola, non già la conosciamo tale in se stessa; e però le nostre idee della grandezza, o piccolezza delle cose, non sono assolute, ma relative, facendo mestieri per giudicarne, che le riferiamo ad un certo stato di mediocrità proporzionato alle idee, che di tali cose abbiamo formate; o pure a certe convenzioni stabilite, mercè le quali ci atteniamo a qualche cosa di fisso ne' giudizii, che delle diverse grandezze avanziamo.

3. Quindi è evidente, che noi non conosciamo la grandezza, o piccolezza delle cose, se non di una maniera vaga, e indeterminata, onde apprendiamo come grandi le medesime cose in un senso, che in un'altro riguardiamo come piccole. Siccome poi il rapporto, che noi facciamo di una grandezza con un'altra è affatto arbitrario, nè sappiamo in qual punto del tratto infinito tra il massimo, e il niente si trovi quella quantità, che ci serve di norma a questo rapporto, perciò egli nulla decide della grandezza, o piccolezza assoluta.

4. A fine però di avere qualche idea distinta della grandezza, o piccolezza delle cose, e per ridurre tutti i rapporti generali a qualche sorte di precisione, si è pensato di scegliere in ciascuna spezie di quantità certe misure fisse, e invariabili, che sono come altrettanti primi gradi, su' quali ci regoliamo in determinare tutti i differenti gradi delle quantità della medesima spezie.

5. Alcuna volta ancora noi giudichiamo, che le cose sono grandi, o piccole secondo certe idee medie, che queste cose ci somministrano: Per esempio sapendo quale è la statura conveniente di un' uomo giudichiamo, che un' uomo è grande quando supera questa statura, o pure ch' egli è piccolo, se non ci arriva; lo che fa, che spesse volte di due cose ne diciamo una grande, e l' altra piccola, abbenchè paragonate tra loro si debba dire tutto il contrario.

6. La Quantità è di due sorti, continua cioè, e discreta. La quantità continua è quella, che può essere divisa in parti, ma non ha parti realmente distinte, quali nascono soltanto qualora patisce qualche divisione. Dal non avere poi parti real-

mente diſtinte ben s' intende, che nemmeno aver deve un determinato numero di parti, e però la di lei diviſione non riconoſce alcun limite.

7. La quantità diſcreta è quella, che già ſi conſidera in parti diviſa, perlochè non altro ella è, che la quantità continua attualmente diviſa, le di cui parti non hanno termine comune, che le congiunga: Come diviſo in due parti un numero, eſſe parti non hanno numero alcuno, che ſia fine d'una, e principio dell'altra.

8. Suol dirſi, che la quantità per l' appoſizione di altre parti ſi accreſce, e con levargliene ſi diminuiſce, e che perciò coll'aumentazione, o diminuzione ſi poſſono rendere eguali, o ineguali le quantità, che ſi paragonano; ma queſta eſpreſſione ammette degli equivochi, mentre preſa a rigore, cioè ſecondo le idee, che grammaticalmente ſomminiſtra allo ſpirito, manca tuttaffatto di giuſtezza, e ſeco porta un ſenſo falſo, per lo che deveſi ſpiegare. Egli è falſo pertanto a rigore de' termini, che ſi poſſa giammai veramente aumentare, o diminuire una quantità, o fare che due quantità ineguali poſſano divenire eguali, o d' eguali renderſi ineguali, avvegnachè qualſivoglia quantità preſa individuamente per tale, o tale, goda uno ſtato immutabile, il di cui eſſere può ceſſare, ma non già cambiarſi: Come a cagion d' eſempio ſe da un certo numero di lire ſe ne leverà, o ſe glie ne aggiungerà una certa porzione, egli è chiaro, che ne riſulterà un numero più piccolo, o più grande di quello, che ſi aveva da prima: Queſta però non è la quantità di prima, che ſi è diminuita, o aumentata, così che ſia divenuta realmente più grande, o più piccola, ch' ella non era, ma aſſolutamente è un'altra quantità differente, che deveſi ben guardare di non confondere colla prima. Iſteſſamente ſe da una di due quantità eguali ſi leverà qualche coſa, ne verranno due quantità ineguali; la più piccola però di queſte due non è già quella ſteſſa, da cui ſi è levato qualche coſa, ma ella è una ſua parte.

9. L' aumentazione pertanto altro non è, che il riſultato dall' unione di più quantità della ſteſſa ſpezie, come la diminuzione è il riſultato dalla ſeparazione d'una quantità da un'altra della ſteſſa ſpezie: Onde coll'aumentarſi una data quantità ne riſulta un' altra quantità più grande, o più piccola col diminuirſi, e con queſta aumentazione, o diminuzione ſi fa eguale, o ineguale ad una quantità propoſta un' altra nuova quantità.

10. Dalla attuale diviſione della quantità naſce il numero, il quale non è altro, che un' aggregato di unità, o ſia una moltitudine dall' unità miſurabile; e però l' unità non è numero, ma parte del numero; onde ogni numero avrà tante parti quante unità egli contiene, e miſurerà ſe ſteſſo coll' unità.

11. L' unità è quella, ſecondo cui ciaſcuna coſa materiale viene detta una. Queſta unità è diverſamente inteſa dal Naturale, e dal Matematico. Il Naturale, poichè conſidera le coſe, tanto ſecondo l' eſſere, quanto ſecondo la ragione, congiunte con qualche materia ſenſibile, con l' unità nomina ſempre la materia come ſuo materiale ſoggetto, dicendo per eſempio: Una Città; una Nave. Ma il Matematico abbenchè le conſideri come il Naturale ſecondo l' eſſere di tale materia ſenſibile, ad ogni modo le conſidera poi, e le piglia come aſtratte da tale materia ſenſibile: E queſta unità Matematica è indiviſibile.

12. Dall' unità naſcono cinque generazioni di numeri, cioè numero ſemplice; Decine; Centinaja; Migliaja; e Milioni.

13. Il numerare è la prima operazione del Calcolo, della di cui origine, e invenzione nulla di certo abbiamo; pare però, che attribuire ſi poſſa alla prima ſocietà degli Uomini, cui nel commerciare neceſſaria rendevaſi l' arte del contare:

Per

Perlochè molti vi sono, che non dubitano di farne i Tirii gli Autori, essendo stati i primi commercianti tra gli antichi Popoli. Gioseffo poi ci assicura, che per mezzo di Abramo l'arte di contare passò dall'Asia in Egitto, e dall'Egitto in Grecia, indi ai Romani.

14. Le figure, delle quali ci serviamo per numerare, sono le seguenti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, le quali inventate furono dagli Arabi, e portate dai Saraceni in Ispagna, da poi circa l' anno del Signore 999. furono in Italia trasferite per opera di Geberto Monaco, che poscia sotto il nome di Silvestro II. fu eletto Papa. La prima di queste figure significa uno; la seconda due; la terza tre; la quarta quattro; la quinta cinque; la sesta sei; la settima sette; l' ottava otto; la nona nove; la decima, che chiamasi zero, non ha alcun valore proprio, ma ha solo per uffizio di far crescere il valore delle figure antecedenti; ed ecco come.

15. Il valore di ciascuna figura dipende dal luogo, che essa occupa rispetto all' altre, mentre il valore della prima figura a destra è di unità, e però qualunque sia la figura ella indicherà altrettante unità; il valore della seguente seconda figura è di decine, per lo che ella importerà tante decine, quante sono le unità, che contiene; il valore della seguente terza figura è di centinaja, onde rappresenta altrettante centinaja quante unità ella contiene ec., come si può vedere qui sotto, ove ho posto i numeri indicanti il luogo di qualunque figura, ed il suo corrispondente valore, dove vedesi come nel passare da un posto all' altro verso la sinistra il valore di ciascuna figura diventa dieci volte maggiore di quello, che era nel posto precedente: E questo è l' uffizio del zero, di far passare cioè le figure significative ad un luogo superiore, e conseguentemente di far crescere il loro valore.

16. Ora dal seguente ordine si scorge, che unicamente devesi ripetere Unità, Decine, Centinaja, dicendosi unità, decine, centinaja; poi unità di migliaja, decine di migliaja, centinaja di migliaja; indi unità di milioni, decine di milioni, centinaja di milioni ec.

17. Non tutti nel contare si sono serviti delle presenti figure. Delle figure usate dai Greci, e dai Romani tratterò sul fine di questo libro, necessario essendo averne qualche contezza, tanto più che le figure usate dai Romani si praticano tuttavia.

Valore corrispondente al posto delle figure.

Posto	Valore
22.	Migliaja di trilioni ec.
21.	Centinaja di trilioni.
20.	Decine di trilioni.
19.	Trilioni, o sia unità di trilioni.
18.	Centinaja di migliaja di bilioni.
17.	Decine di migliaja di bilioni.
16.	Migliaja di bilioni.
15.	Centinaja di bilioni.
14.	Decine di bilioni.
13.	Bilioni, o sia unità di bilioni.
12.	Centinaja di migliaja di milioni.
11.	Decine di migliaja di milioni.
10.	Migliaja di milioni.
9.	Centinaja di milioni.
8.	Decine di milioni.
7.	Milioni, o sia unità di milioni.
6.	Centinaja di migliaja.
5.	Decine di migliaja.
4.	Migliaja.
3.	Centinaja.
2.	Decine.
1.	Unità.

18. Debbasi pertanto leggere il seguente numero 399784700118074464789750, il quale mediante il calcolo s'è trovato dovere esprimere il numero delle libbre, che pesa tutta la Terra, supposto che un piede solido di terra pesi 100. libbre. Per ciò fare si notino le virgole ad ogni terzo numero cominciando a destra, ed ai numeri, che vengono dopo ogni senario si notino sopra per ordine i numeri 1, 2, 3, 4, ec. principiando a destra, come qui si vede.

$$399,\ 78\overset{3}{4},\ 700,\ 11\overset{2}{8},\ 074,\ 46\overset{1}{4},\ 789,\ 750$$

Ora per leggere il presente numero, perchè la prima figura a sinistra, cioè il 3, dalla qual parte s'incomincia a leggere, essendo in ordine la vigesimaquarta, vale centinaja di migliaja di trilioni, e la seguente 9 vale decine di migliaja di trilioni, la terza 9 vale migliaja di trilioni ec. giusta l'ordine fissato al num. 15; però si dirà Trecennovantanove mila, settecent'ottantaquattro trilioni, settecento mila, cendiciotto bilioni, settantaquattro mila, quattrocensessantaquattro milioni, settecent'ottantanove mila, settecencinquanta, numero delle libbre, che pesa tutta la terra.

19. In questo stesso Esempio si osservi, che le sedi mancanti di figure significative devonsi riempiere di zeri, il di cui corrispondente valore essendo nullo, perciò non si legge.

20. Dappoichè dall'attuale divisione della quantità nasce il numero (pel num. 10.), e della quantità niente di assoluto noi conosciamo (pel num. 2.), ma soltanto i diversi rapporti, egli è evidente, che il numero propriamente altro non è, che un rapporto, con cui si esprime la ragione di una grandezza ad un'altra, alla quale si paragona, in quanto che vi è contenuta, o la contiene di una certa maniera: così per esempio il numero 4 esprime il rapporto di una quantità ad un'altra più piccola, che si prende per l'unità, e che nella più grande è contenuta quattro volte.

21. L'arte poi di calcolare, la quale versa circa questi rapporti, in quanto che distinti sono con segni particolari, combinandoli fra loro, è di due sorti, Teorica cioè, e Pratica. La Teorica considera la quantità, le proprietà, le ragioni de' numeri astratti, e ne dimostra le regole: La Pratica riguarda l'atto di numerare, e di calcolare, ritrovando certi numeri per mezzo di altri dati, de' quali è cognita la relazione ai primi.

ARTICOLO II.

Definizioni, e Assiomi.

22. La Definizione è una Proposizione, che determina in qual senso debbasi prendere un proposto vocabolo, e però mediante la definizione si ottiene la nozione distinta di ciò, che deve significare l'accennato vocabolo.

23. Def. 1. Numero pari è quello, che si può dividere perfettamente per metà, come 4, 12, 28, ec.

24. Def. 2. Numero dispari è quello, che diviso in due parti per 2, la divisione non ne viene esatta, essendo una parte superata dall'altra per una unità, come il 7, 19, 35 ec.

25. Def. 3. Numero parimente pari, è quello, che viene misurato da un nu-
me-

mero pari per volte pari, come il 12, che è misurato sei volte dal numero pari 2.

26. Def. 4. Numero parimente dispari è quello, che viene misurato da un numero pari per volte dispari, come il 12, che è misurato tre volte dal numero pari 4.

27. Def. 5. Numero parimente, e disparimente pari è quello, che da' numeri pari ora viene misurato per volte pari, ora per volte dispari: come il 20, che è misurato dieci volte dal numero pari 2, e cinque volte dal numero pari 4.

28. Def. 6. Numero disparimente dispari è quello, che viene misurato da numero dispari per volte dispari, come il 21, che è misurato sette volte dal numero dispari 3.

29. Def. 7. Numero primo è quello, che dalla sola unità può essere misurato, come il 7, 11 ec.

30. Def. 8. Numero composto è quello, il quale oltre l'unità ha altri numeri, che perfettamente lo misurano, come il 6 dal 2, e dal 3 è misurato.

31. Def. 9. Numeri contro se primi sono quelli, i quali quantunque separatamente considerati abbiano diversi numeri, che li misurano, non hanno però per misura comune, che l'unità, come il 21, e il 16.

32. Def. 10. Numeri fra loro composti sono quelli, i quali oltre l'unità ricevono qualche altro numero per misura comune, come il 20, e l'8.

33. Def. 11. Numero perfetto è quello, il quale è eguale all'aggregato di tutte le sue parti, che lo misurano perfettamente, come il 6, che è eguale all'aggregato di tutte le sue parti 1, 2, 3.

34. Def. 12. Numero abbondante è quello, che resta superato dall'aggregato di tutte le sue parti, che lo misurano perfettamente, come il 12, l'aggregaro delle cui parti 1, 2, 3, 4, 6, è 16 maggiore di 12.

35. Def. 13. Numero scarso è quello, che supera l'aggregato delle sue parti, come il 9, l'aggregato delle cui parri 1, 3, è 4.

36. Def. 14. Numero numerante è quello, che si prende in astratto, come tre, sette ec. Numero numeraro è quello, che si prende in concreto, come quattro Cavalli, nove Soldati ec.

37. Def. 15. Quando un numero è eguale a due, tre, quattro ec. altri numeri presi insieme, questi si dicono le parti, ed esso il tutto, come l'8, che è uguale a quattro volte il 2.

38. Col nome di tutto pertanto si appella qualunque quantità, che risulta dall'aggregato di più quantità. Siccome poi la grandezza, e la piccolezza non sono che nomi relativi (pel num. 2.), che esprimono soli rapporti di più quantità paragonate fra loro, così pure il tutto, e la parte non esprimono, che delle maniere di essere, che nelle differenti cose hanno luogo, delle quali ciascuna può essere detta un tutto riguardo ad un'altra, che essa contiene; o pure può chiamarsi parte rispetto ad un'altra, nella quale è contenuta.

39. Def. 16. Quelle quantità diconsi omogenee, le quali sono della stessa spezie, e però una presa più volte può superare un'altra; ovvero col levarsi una dall'altra alcune volte rimane nulla, o una quantità minore di se stessa. Per lo che i numeri si diranno omogenei, qualora si riferiranno a quantità della stessa spezie. Al contrario quelle quantità diconsi eterogenee, che sono di diversa spezie, e però una più volte ripetuta non può eguagliare, o superare l'altra.

40. L'Assioma è una verità evidente, di cui si resta convinto al solo considerarne i termini.

41. Assioma 1. Il tutto è maggiore di qualunque sua parte, ed è eguale a tutte le sue parti prese insieme.

42.

42. E però quel numero è maggiore di un'altro, di cui una parte a tutto l'altro è eguale, ovvero egli è minore, se ad una sol parte dell'altro è eguale.

43. Assioma 2. Quelle quantità sono eguali fra loro, le quali ad una terza quantità sono eguali, o sono egual parte della medesima, o delle quali questa terza quantità è una parte istessa.

44. Assioma 3. Quelle quantità sono ineguali, le quali non misurano egual numero di volte una terza quantità, ovvero dalla medesima non sono egualmente misurate.

45. Assioma 4. Se a quantità eguali si aggiugneranno, o dalle medesime si leveranno una, o più quantità eguali, le quantità, che nel primo, e nel secondo caso risulteranno, saranno eguali.

46. Assioma 5. Se a quantità eguali si aggiugneranno, o dalle medesime si leveranno quantità ineguali, le quantità che nell' uno, e nell'altro caso risulteranno, saranno ineguali.

47. Assioma 6. Se a quantità ineguali si aggiugnerà, o dalle medesime si leverà una, o più quantità eguali, le quantità, che nell' uno, e nell'altro caso risulteranno, saranno ineguali.

48. Assioma 7. Se una quantità sarà maggiore, o minore rispetto ad una di due altre quantità eguali, sarà ancora maggiore, o minore rispetto all'altra.

49. Assioma 8. Quando due quantità sono eguali, una si può sostituire in luogo dell'altra.

50. Assioma 9. Se da due quantità, delle quali la prima sia maggiore della seconda, si leverà, o alle medesime si aggiugnerà una, o più quantità eguali, tanto nel primo, che nel secondo caso, ciò che ne risulterà dalla prima sarà maggiore di ciò, che ne risulterà dalla seconda.

Spiegazione di alcuni segni soliti usarsi nel calcolo.

51. Il segno + significa più, onde $4+7$ vuol dire quattro più sette, ed egli serve per indicare l'addizione della quantità.

52. Il segno − significa meno, o sia esprime un difetto; onde $8-5$ vuol dire otto meno cinque, ed egli serve per additare la sottrazione di una quantità da un'altra.

53. Il segno X serve per indicare la moltiplicazione da farsi; onde 9×5 vuol dire, che il nove si deve moltiplicar per 5. In vece del segno X alcuni usano il punto . facendo 9.5

54. La linea —, che s'interpone orizzontalmente fra due quantità, è il segno della divisione; onde $\frac{15}{3}$ vuol dire, che la quantità posta sopra la linea, cioè il 15 si deve dividere per la quantità posta sotto la linea, cioè pel 3. Alcuni in vece della linea — usano i due punti : facendo $15:3$

55 Queste due linee = sono il segno d'eguaglianza; per lo che $9+4=13$ vuol dire, che nove più quattro è eguale a tredici. Il Cartesio in vece di = usa il segno ∞.

56. Il segno ±, cui è contrario il segno ∓, è segno ambiguo, e significa tanto +, come −.

57. Il segno > vuol dire, che la quantità, che lo precede, è maggiore di quella, che lo segue; onde $7>5$ indica che il 7 è maggiore del 5.

58. Il segno poi contrario < vuol dire, che la quantità, che lo precede, è minore di quella, che lo segue; onde $4<10$ indica che il 4 è minore del 10.

No-

Notizie preliminari necessarie a sapersi.

59. La Proposizione è di due sorti: altra dicesi Teorema, altra appellasi Problema. Il Teorema è una proposizione, in cui si propone da dimostrare la verità di qualche cosa. Il Problema è una proposizione, che propone qualche cosa da fare. Posta la proposizione, che contiene i dati del Problema, ne segue la di lui costruzione, che consiste in una preparazione, e dichiarazione di quanto devesi fare per soddisfare al proposto Problema. Pei Teoremi il più delle volte non è necessaria alcuna costruzione. Tanto il Problema poi, come il Teorema ammette la sua dimostrazione. Rispetto al Problema devesi dimostrare, che si è fatto bene lo che era proposto da farsi; quanto al Teorema si deve dimostrare lo che in esso si enuncia.

60. La Dimostrazione consiste in un discorso certo, ed evidente dedotto da principii veri, ed inconcussi. La materia poi, che sola è capace della perfezione, e verità Matematica, è la quantità astratta. Questa dimostrazione deve essere breve, e semplice, e niente in essa devesi assumere, che non sia manifesto per le dottrine precedenri. Peccherebbe pertanto la dimostrazione, se in essa si assumesse o l'autorità, o l'esperienza avuta da'sensi, se si prendesse per vero ciò, che devesi provare, o se ella non servisse a turti i casi possibili.

61. Ogni dimostrazione o è ostensiva, o conduce all'impossibile. L'ostensiva dimostra per cause materiali, o formali. Quella che conduce all'impossibile, porta a conseguenze, che sono direttamenre opposte, o ai principii, o alle cose dimostrate, o all'Ipotesi fatta nel Problema, o Teorema. Tanto la prima, come la seconda può procedere in due maniere, o sinteticamente, che dicesi metodo di composizione, o analiticamenre, che dicesi metodo di risoluzione. Il metodo analitico è un discorso, mediante cui si ricerca la verità della cosa prendendola già per vera, e concessa, o se ne cerca la possibilità prendendola già per fatta. Farta poi questa supposizione talmente si raziocinia su quelle cose, che da essa derivano, e tanto si procede risolvendo, finchè si giunga a qualche verità, vale a dire alle cose conosciure, e concesse, nel qual modo viensi a risolvere la cercata conclusione nelle proprie cause, per le quali si dimostra; o pure si giunge a qualche falsità, cioè ad una conclusione, che distrugge le cose concesse. Se si giunge a qualche cosa vera, e concessa, egli è segno evidente, che la supposizione, da cui tale verità si è dedotta, è possibile, e vera, poichè il vero in buona materia, e forma non segue, che dal vero. Dopo poi essersi ritrovata tale verità, sarà facile il comporre la dimostrazione retrocedendo per i medesimi vestigii calcati nella risoluzione, prendendo cioè per primo ciò, che nella risoluzione fu ritrovato per ulrimo, indi ordinando come antecedenri quelle cose, che erano conseguenti, raziocinando così sopra le verità trovare, finchè si giunga alla conclusione del quesito. Che se nella risoluzione si giunga a qualche cosa falsa, e impossibile, egli è un'argomento manifesto, che la fatta supposizione è falsa, ed impossibile, e tale sarà ancora il quesito, perchè in buona mareria, e forma il falso non segue, che dal falso.

62. Per dimostrare riducendo all'impossibile devesi prendere ciò, che al quesito ripugna, come in conseguenza concesso, per provare ciò, che al vero si oppone; vale a dire si suppone ciò, che al quesito contraddice, finchè s'incontra qualche assurdo, per cui distrutta la supposizione, si confermi ciò, che da principio si cercava.

63. La dimostrazione de' Problemi si termina con queste parole: Lo che si doveva fare; e la dimostrazione de'Teoremi si termina con queste: Lo che si doveva dimostrare.

64.

64. Il Lemma è una Propofizione, la quale fi ammette foltanto in grazia delle propofizioni feguenti, acciocchè ella ferva a facilitarne la loro dimoftrazione.

65. Il Corollario è una confeguenza, che fi deduce dalle verità già efpofte.

66. Lo Scolio è una efpofizione, o dichiarazione delle cofe dette.

ARTICOLO III.

Modo di fommare le quantità razionali intere.

67. Abbiamo detto al num. 21., che l'arte di calcolare confifte propriamente nel trovare l'efpreffione di un rapporto, che rifulta dalla combinazione di più rapporti. Ora le differenti maniere di combinare quefti rapporti danno le differenti regole del Calcolo. Generalmente però ficcome tutti i rapporti delle quantità fi riducono a faperne l'egualità, o l'inegualità, così tutte le operazioni, delle quali la loro natura è fufcettibile, fi poffono ridurre o all'aumentazione, o alla diminuzione, vale a dire o alla fomma, o alla fottrazione, altro di fatti non effendo, come vedremo in appreffo, le operazioni di moltiplicare, dividere, inalzare a Poteftà, eftrarre Radici ec., che varie, e diverfe maniere di concepire quefte due operazioni.

68. Def. 1. Numero razionale, o commenfurabile è quello, che ammette qualche mifura, o fia è mifurabile almeno dall'unità, e però diceli ancora numero effabile, o efprimibile.

69. Def. 2. Numero intero è quello, che ci efibifce una, o più unità.

70. Def. 3. Sommare non è altro, che ritrovare il valore di più figure numeriche prefe infieme; o fia non è altro, che ridurre ad una fola efpreffione le efpreffioni di varie quantità.

71. Prob. 1. Si debbano fommare più numeri dati.

72. Rifol. Si fcrivano i numeri dati uno fotto all'altro in maniera, che le unità fiano fotto alle unità, le decine fotto alle decine, le centinaja fotto alle centinaja ec., di poi fi aggiungano infieme tutte le figure della prima colonna verticale a mano deftra, e fe il numero, che da quefta unione rifulta, cofta di una fola figura, ella fi fcriva fotto a detta colonna; fe poi cofta di due figure, fi fcriva fotto a tale colonna la figura, che rappreſenta le unità, e l'altra, che efibifce le decine, fi ferbi da aggiungerfi alla fuffeguente colonna; che fe il fuddetto aggregato coftaffe di tre figure, quella delle unità fi fcriva fotto alla detta colonna, quella delle decine fi ferbi da aggiungerfi alla feguente colonna, e finalmente quella delle centinaja fi aggiunga alla terza colonna. Fatto quefto fi paffa alla feconda colonna, e fi aggiungono infieme tutte le di lei figure con la figura, che fi ferbò, ed il numero, che ne rifulta, fe è di una fola figura fi fcrive fotto a tale colonna; fe cofta di più figure, fi opera giufta la regola poc'anzi data. Dopo ciò fi paffa alla terza colonna, e fi opera nel modo, che fi è tenuto per le altre. Il numero poi, che rifulta dal raccoglierfi le figure dell'ultima colonna a finiftra, fe cofterà di due, o più figure, fi fcrive interamente com'è. E in quefto modo fi avrà la fomma cercata, Lo che dovevafi fare.

73. Dim. La intera fomma ritrovata rifulta come un tutto dalle fomme peculiari, che ne fono le parti. Dunque (pel num. 41.) a tutte loro è eguale, e però ella è la ricercata fomma di tutti i dati numeri.

ESEM-

ESEMPIO.

74. Prob. 2. Cercasi quanti anni siano passati dalla creazione del Mondo fino all' Era Cristiana.

75. Risol. Dalla creazione del Mondo fino al Diluvio Universale si contano

Anni	1 6 5 6.
Dal Diluvio Universale fino alla Vocazione d' Abramo - -	4 2 7.
Dalla Vocazione d'Abramo fino al passaggio pel Mar Rosso - -	4 3 0.
Dal passaggio pel Mar Rosso fino alla fondazione del Tempio - -	5 8 1.
Dalla fondazione del Tempio fino al principio dell' Impero di Ciro	4 7 9.
Dal principio dell' Impero di Ciro fino all' Era de' Seleucidi	2 2 4.
Dall' Era de' Seleucidi fino all' Era Cristiana - - - - - - - -	3 1 2.
Dalla creazione del Mondo fino all'Era Cristiana sono passati Anni - - -	4 1 0 9.

76. Disposti i numeri in modo, che le unità siano sotto alle unità, le decine sotto alle decine ec. come quì si vede, si aggiungano insieme le figure 2, 4, 9, 1, 0, 7, 6 della prima colonna verticale a mano destra, le quali danno 29, però sotto tale colonna si scriva il 9, e l' altra figura 2 si serbi da aggiugnersi alle figure 1, 2, 7, 8, 3, 2, 5 della seguente colonna, onde si ha 30, di cui il 0 scrivasi sotto, ed il 3 si porti alla seguente colonna, le di cui figure 3, 2, 4, 5, 4, 4, 6 col 3 serbato danno 31: sotto a tale colonna si scriva l' 1, ed il 3 unito all' 1 dell'ultima colonna dà 4, che devesi scriver sotto: onde la cercata somma degli anni passati dalla creazione del Mondo fino all' Era Cristiana è 4109.

77. Nella somma si può far uso del segno accennato al num. 51. Per lo che la somma di questi tre numeri 6, 8, 2 si potrà indicare così $6 + 8 + 2$.

78. Per esaminare se la somma fatta è giusta, si devono risommare tutte le proposte partite a riserva d'una, e poi questa somma devesi sommare colla partita ommessa, e se ne verrà la prima somma, sarà segno, che l' operazione fu fatta bene, lo che è per se stesso evidente. Prendo pertanto ad esaminare l' operazione poc' anzi fatta, e quì noto tutte le partite a riserva della prima, cioè

	4 2 7.
	4 3 0.
	5 8 1.
	4 7 9.
	2 2 4.
	3 1 2.
Somma	2 4 5 3.
Prima partita	1 6 5 6.
Somma totale	4 1 0 9.

Poichè adunque n'è venuta la somma da prima trovata, egli è segno, che l'operazione fu fatta bene.

ARTICOLO IV.

Modo di fare la ſottrazione nelle quantità razionali intere.

79. DEf. Il ſottrarre non è altro, che trovare la differenza, che paſſa tra due propoſte quantità, cioè ſapere di quanto la maggiore ſupera la minore. Tale differenza diceſi l'eccesſo della quantità maggiore ſopra la minore; o pure il reſiduo della maggiore meno la minore. E però la differenza è l'eccesſo riſpetto alla quantità maggiore, e il difetto riſpetto alla minore.

80. Corol. 1. Quindi il reſiduo è ſempre minore della maggiore delle due date quantità.

81. Corol. 2. E queſto reſiduo ſommato colla quantità minore darà la maggiore.

82. Corol. 3. La differenza poi è ciò, che coſtituiſce l'inegualità delle quantità.

83. Corol. 4. Poichè il numero maggiore ſi compone dal minore più la differenza, la ſomma del maggiore, e del minore ſarà eguale al doppio del minore più la differenza.

84. Corol. 5. Conſeguentemente la metà della ſomma di due quantità è eguale alla quantità minore più la metà della differenza.

85. Corol. 6. Onde eſſendo data la ſomma di due quantità, e la loro differenza, ſi avrà la quantità minore con levare dalla metà di tale ſomma la metà della differenza, o pure ſi avrà la maggiore con aggiungere alla metà della ſomma la metà della differenza.

ESEMPIO.

86. Prob. 1. Da due oppoſti luoghi, la di cui diſtanza è di miglia 694, partono due Corrieri, e nel punto d'incontro trovaſi il primo Corriere aver fatto 82 miglia più del ſecondo. Cercaſi quante miglia abbia fatto il primo Corriere, e quante il ſecondo.

87. Riſol. Si ſommi la metà di 694 colla metà di 82, e ſi avrà $347 + 41 = 388$ viaggio del primo Corriere. Poſcia dalla metà di 694 ſi levi la metà di 82, e ſi avrà $347 - 41 = 306$ viaggio del ſecondo Corriere.

88. Prob. 2. Date due quantità ſi debba ſottrarre la minore dalla maggiore.

89. Riſol. Si ponga il numero minore ſotto al maggiore ſcrivendo le unità ſotto alle unità, le decine ſotto alle decine ec., di poi (condotta una linea ſotto a queſti numeri) ſi levi la prima figura inferiore a mano deſtra dalla corriſpondente ſuperiore, ed il reſiduo ſi ſcriva ſotto, dopo di che ſi levi la ſeconda inferiore dalla ſeconda ſuperiore, ed il reſiduo ſi ſcriva ſotto, e così collo ſteſſo metodo ſi proceda riſpetto all'altre figure.

90. Che ſe nel numero ſuperiore vi ſaranno alcune figure, cui nel numero inferiore corriſpondeſſero ſoli zeri, in tal caſo devonſi notare ſotto la linea le figure ſteſſe del numero ſuperiore.

91. Se poi qualch'una delle figure inferiori ſarà maggiore della ſua corriſpondente ſuperiore, in tal caſo dalla ſuſſeguente figura ſuperiore ſi levi una unità, e ſi doni a queſta figura, da cui non ſi può fare la ſottrazione, la quale unità (pel num. 15.) qui valerà dieci, onde dall'aggregato di queſto dieci, e della detta figura ſi levi la corriſpondente figura inferiore, ed il reſiduo ſi ſcriva ſotto.

92.

92. Quando nel numero inferiore, e superiore s'incontrano due zeri, o due figure eguali, sotto devesi scrivere zero, perchè dal niente levando niente, o da una quantità levando una quantità eguale, resta niente; se ciò succede nell'ultime figure a sinistra il zero non si scrive, perchè ivi a nulla vale giusta il num. 14.

93. Qualora nel numero superiore si trovano alcune figure a sinistra, alle quali nel numero inferiore non ve ne corrispondono, dovransi scrivere come sono.

94. Dim. dell'operazione. Il ritrovato residuo risulta come un tutto dai diversi residui particolari; dunque (pel num. 41.) a tutti loro è eguale, e conseguentemente è la vera differenza, che passa tra la data quantità maggiore, e la minore. Lo che si doveva trovare.

ESEMPIO.

95. Prob. 3. Un Esercito di 70394 Soldati, avendo data la rotta al Nemico, ha riportato di bottino Scudi 10062457, de' quali n'è stato distribuito uno per Soldato: cercasi quanti ne siano rimasti.

Scudi	1 0 0 6 2 4 5 7.
Soldati	7 0 3 9 4.
Residuo	9 9 9 2 0 6 3.

Risol. Primieramente levo il 4 dal 7, ed il residuo 3 lo scrivo sotto; poi perchè dalla seconda figura 5 del numero superiore non posso levare il 9, dal susseguente 4 superiore levo una unità, la quale portata nel luogo del 5 vale dieci, e però $10 + 5 = 15$; dal 15 adunque levo il 9, ed il residuo 6 lo scrivo sotto: passo indi al 4, che per esserci stata levata una unità è diventato 3, da cui levando il 3 inferiore resta nulla, e però sotto scrivo 0. Fatto ciò passo al 2, da cui levando il corrispondente 0 inferiore, resta 2, che scrivo sotto. Poscia dal 6 non potendo levare il 7 inferiore, do al 6 il valore di una unità presa dal seguente numero, la quale nel luogo del 6 vale dieci, onde si hà $10 + 6 = 16$, da cui levo il 7, e sotto scrivo il residuo 9. Ora perchè ho levata una unità al seguente 0 per darla al 6, ed il 0 per se non ha alcun valore, bisogna, che a questo 0 io dia una unità presa dal seguente numero, la quale unità quì valerà dieci; ma perchè vi ho levata, come dissi, una unità per darla al 6, egli resta 9, che scrivo sotto, perchè nel numero inferiore non c'è figura corrispondente da levarci. Istessamente avendo levata una unità al seguente zero, ed il zero in se stesso non avendo valore, bisogna che dal seguente numero io levi una unità per darla a questo zero, la quale unità quì valerà dieci, che per esserci stata presa una unità resta 9, quale devesi scrivere sotto, perchè non c'è corrispondente numero inferiore da levarci. Finalmente dall'ultimo numero 1 essendosi presa una unità resta niente: onde ritrovasi, che dopo la distribuzione di uno Scudo per Soldato sono rimasti Scudi 9992063.

96. La sottrazione si può indicare mediante il segno — spiegato al num. 52. come volendo indicare la sottrazione di 3 da 8, si farà $8 - 3$.

97. Per vedere se la sottrazione è stata fatta a dovere si devono sommare insieme il numero sottratto, ed il residuo trovato, e se tale somma sarà eguale al numero, da cui si è fatta la sottrazione, l'operazione sarà giusta (pel num 81.) Per accertarmi adunque, che il residuo poco fa trovato sia giusto, faccio

Refiduo	9 9 9 2 0 6 3.
Numero minore	7 0 3 9 4.
Somma	1 0 0 6 2 4 5 7.

e perchè mi viene il numero maggiore egli è fegno evidente, che l'operazione fu fatta bene.

ARTICOLO V.

Modo di fare la Somma, e la Sottrazione con diverfe fpecie.

98. SE nella fomma, o nella fottrazione da farfi entrano diverfe fpecie, come fcudi, lire, foldi, denari: pertiche, braccia, oncie: anni, mefi, giorni, ore ec. fi offervi prima di tutto il valore, che a ciafcuna di tali fpezie conviene, indi fi proceda all'operazione avvertendo di porre ciafcuna fpezie fotto alla fua corrifpondente. E quanto alla fomma fi fommi la prima colonna verticale a deftra, e fe tale fomma non giunge all'intero valore di tale fpecie, fotto fi fcriva il numero ritrovato; fe eguaglia tale valore, fotto fi fcriva il zero, indi fi porti una unità alla feguente fpecie; fe poi lo fupera, fotto fi fcriva il di più, ed alla feguente fpecie fi portino tante unità, quante volte il ritrovato numero contiene tal valore. Lo fteffo poi fi dica della fomma delle altre fpecie. Quanto alla fottrazione fi operi giufta il num. 89., fennonchè dovendofi donare qualche cofa al numero fuperiore per poterci levare la corrifpondente figura inferiore, bifognerà darci una unità prefa dalla feguente fpecie, quale unità qui acquifterà il valore di quefta fpecie inferiore.

ESEMPIO.

99. Prob. Effendo date quattro livellazioni, che fi fono prefe tra due luoghi A, B; cercafi di quanto il luogo A fia più alto del luogo B.

Numeri delle livellazioni	Siniftra B			Deftra A		
1.	Pertiche 3.	braccia 5.	oncie 4.	Pertiche 5.	braccia 3.	oncie 8.
2.	2.	4.	7.	11.	5.	6.
3.	5.	3.	9.	8.	4.	7.
4.	7.	2.	3.	13.	2.	5.
Somma	19.	3.	11.	39.	4.	2.

ora levandofi la fomma della parte finiftra dalla fomma della parte deftra, il refiduo darà l'altezza del luogo A fopra il luogo B, come quì fi vede.

Somma deftra	39.	4.	2.
Somma finiftra	19.	3.	11.
Refiduo	20.	0.	3.

100. Rifol. Comincio nella parte deftra a fommare le oncie 5, 7, 6, 8, e trovo 26. e perchè in quefto numero entra due volte il dodici (12. oncie fanno un brac-

braccio), e avanza 2, sotto scrivo questo 2, e porto 2 alla colonna delle braccia, le di cui figure 2, 4, 5, 3 sommate con questo 2 danno 16, in cui entra due volte il 6 (6 braccia fanno una Pertica), e avanza 4, che scrivo sotto, e porto il 2 alla colonna delle pertiche, le di cui figure 13, 8, 11, 5 sommate con questo 2 danno 39, che scrivo sotto. Poscia nella stessa maniera opero dalla parte sinistra, e così ho le somme cercate.

101. Quanto poi alla sottrazione perchè dal 2 non si può levare l'11, prendo una unità dalla seguente figura 4, la quale unità trasferita a questa spezie inferiore vale dodici, perchè un braccio è 12 oncie. Dall'aggregato pertanto di $12 + 2 = 14$ levo l'11, e mi resta 3, che scrivo sotto; poscia passo alla seguente spezie, in cui il 4 superiore, a motivo d'essercisi levata una unità, è rimasto 3, da cui levando il 3 inferiore resta 0, che noto sotto. Fatto ciò passo alla colonna delle pertiche, e dal 9 levando 9 resta nulla, onde sotto scrivo 0, indi dal 3 levo l'1, ed il residuo 2 lo scrivo sotto, con che ho il residuo cercato di pertiche 20, e oncie 3 d'altezza del luogo A sopra il luogo B. Lo che dovevasi trovare.

ARTICOLO VI.

Modo di moltiplicare le quantità razionali intere.

102. DEf. 1. Il moltiplicare non è altro, che ritrovare un numero, il quale contenga tante volte il numero, che è stato moltiplicato, quante volte il numero, con cui si fece la moltiplicazione, contiene l'unità, o *vice versa*.

103. Il numero, che moltiplica dicesi moltiplicante; quello che viene moltiplicato si dice moltiplicando, ed il numero, che dalla moltiplicazione risulta, si dice prodotto, o fatto. Con termine generale il moltiplicatore, ed il moltiplicando si chiamano fattori, o lati del prodotto.

104. Corol. 1. Adunque (pel num. 102.) si pone il moltiplicando tante volte, quante sono le unità del moltiplicante: ovvero si prende tante volte il moltiplicante, quante sono le unità del moltiplicando.

105. Corol. 2. Dal che s' intende primieramente, che risulta sempre lo stesso prodotto, o si moltiplichi il primo fattore nel secondo, o il secondo nel primo.

106. Corol. 3. In secondo luogo, che la moltiplicazione non è altro, che una replicata addizione dello stesso numero.

107. Corol. 4. Parimente se si moltiplicherà qualunque quantità per l'unità, il prodotto sarà la stessa quantità.

108. Corol. 5. E poichè il zero non contiene alcuna unità, se si moltiplicherà pel zero qualche quantità, ella verrassi a porre nessuna volta, e però il prodotto sarà zero.

109. Corol. 6. Che se due quantità eguali si moltiplicheranno per una terza quantità, o per due quantità eguali, ciascuna rispettivamente, i prodotti saranno eguali.

110. Corol. 7. Se poi due quantità ineguali si moltiplicheranno per una terza quantità, o per due quantità eguali, ciascuna rispettivamente, il prodotto che risulterà dalla quantità maggiore sarà maggiore del prodotto, che risulterà dalla minore.

111. Def. 2. Il prodotto di due numeri si chiama numero piano, o superfiziale. Se tali numeri sono ineguali il prodotto loro dicesi rettangolo; se sono eguali si dice quadrato.

112. Corol. E però il numero piano è un numero composto. 113.

113. Def. 3. Il prodotto di tre numeri si chiama numero solido; e se questi tre numeri sono eguali si dice Cubo.

114. Si osservi, che uno stesso numero può avere più lati, o fattori, in quanto che può nascere da diversi numeri fra loro moltiplicati: Come il 36 non solo ha questi due lati 3, 12, ma ancora 2, 18; così 6, 6; e 4, 9, poichè egli risulta tanto dalla moltiplicazione di 3 in 12; come di 2 in 18; o di 6 in 6; o di 4 in 9.

115. Per facilitare la moltiplicazione de' numeri semplici pongo quì la presente Tavola detta Pitagorica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

di cui il modo di servirsi è questo: Si prende uno de' fattori nella prima fila orizzontale, e l' altro fattore nella prima colonna verticale a sinistra, ognuna delle quali colonne ha la serie de' numeri 1, 2, 3, 4 ec., ed il prodotto cercato si troverà nel luogo dove concorrono i due ordini de' numeri presi: Come dovendosi moltiplicare 6 per 8, si prende l' 8 nella colonna per Esempio orizzontale prima, ed il 6 nella prima colonna verticale a sinistra, e nel concorso degli ordini di questi due numeri si trova il 48, che è il prodotto cercato.

116. Prob. 1. Debbasi moltiplicare un numero composto per un numero semplice.

117. Risol. Si scrivano i due dati numeri uno sotto all' altro, lo che fatto se gli conduca sotto una linea, poscia colla figura, che è il moltiplicante, si moltiplichino, mediante la già posta Tavola, tutte le figure del moltiplicando, ed i prodotti si scrivano di mano in mano sotto la linea, ma però con questa legge, che se i prodotti costano di una sola figura, ella si scrive sotto, e se qualch' uno costa di due figure, quella che è a destra si scrive sotto, e quella che è a sinistra si serba da aggiungersi al seguente prodotto.

118. Dim. Il ritrovato prodotto totale risulta da tutti i prodotti peculiari; ma dalla serie dell' operazione costa, che ciascun prodotto particolare contiene tante volte la corrispondente figura del moltiplicando, quante unità contiene il moltiplicante; dunque tanti essendo i prodotti particolari quante sono le figure del moltiplicando, il prodotto totale conterrà tutto il moltiplicando tante volte, quante sono le unità del moltiplicante, e però ciò che si è trovato è il vero prodotto (pel num. 102.) Lo che dovevasi dimostrare.

119. Se il moltiplicante avesse a mano destra qualche zero, e così pure il moltiplicando, o un solo di loro, si farà la moltiplicazione delle figure significative ommettendo i zeri, i quali poi dovransi tutti aggiungere al prodotto; e di ciò la ragione si è, che con aggiungere gli ommessi zeri a destra si vengono a ritirare tanto indietro le figure significative, che si collocano nella propria sede.

E S E M P I O.

120. Prob. 2. Cercasi quanti Barili d' Acqua scaricherà in un' ora un Fiume, che in un minuto ne scarica 20640.

121. Risol. Poichè in un' ora si contengono 60 minuti, moltiplico il 2064 per 6 cominciando a moltiplicare il 4 per 6, il di cui prodotto secondo la Tavola è 24, però scrivo sotto il 4, e serbo il 2; indi moltiplico il 6 per 6, ed al prodotto 36 trovato per mezzo della Tavola aggiungo il 2 serbato, onde ho 38, di cui scrivo l'8 sotto, e serbo il 3; poscia moltiplico il 6 in zero, e mi viene zero; che dovrei scrivere sotto, ma perchè ho portato 3, scrivo sotto questo 3; finalmente moltiplico il 6 in 2, il di cui prodotto 12 scrivo sotto tutto intero, perchè non vi sono più numeri da moltiplicarsi. Se pertanto al ritrovato prodotto 12384 si aggiungeranno i due zeri, che si ommisero, si avrà il ricercato prodotto 1238400, che dà il numero de' Barili d' Acqua, che si scaricano dal proposto Fiume in un' ora.

Moltiplicando	2 0 6 4 0
Moltiplicante	6 0
Prodotto	1 2 3 8 4 0 0

122. Se anche il moltiplicante sarà un numero composto si opererà egualmente, se non che con ciascuna figura del moltiplicante cominciando dalla prima a destra si moltiplicherà tutto il moltiplicando, avvertendo di cominciare a scrivere ciascun prodotto parziale sotto quella figura del moltiplicante, che moltiplica; la somma poi di tutti questi prodotti parziali darà il prodotto totale. Del che la dimostrazione è ben evidente mentre questo prodotto totale risulta come un tutto da quei prodotti parziali, che, come abbiamo veduto al num. 118., sono i veri prodotti di ciascuna figura del moltiplicante in tutto il moltiplicando.

E S E M P I O.

123. Prob. 3. Dato il Cerchio massimo della Terra di 61878850 piedi di Parigi, ed il suo Asse di piedi 19588725 secondo il Newton lib. 3. de' Principii prop. 20. Cercasi il numero de' piedi solidi contenuti in tutto il Globo terrestre.

124. Risol. Si trovi primieramente la superfizie di tutta la Terra in piedi piani con moltiplicare il dato cerchio massimo nell' Asse, così:

Cer-

```
Cerchio massimo          61878850
Asse                     19688725
                ------------------
                        309394250
                       12375770
                      43315195
                     49503080
                    49503080
                   37127310
                  55690965
                 6187885
                ------------------
Superficie cercata.     1218315660966250
```

125. Ora si moltiplichi questo numero di piedi superfiziali per la sesta parte dell' Asse, che è 3281454 come segue.

```
Superficie della Terra in piedi piani.
                    1218315660966250
Sesta parte dell'Asse.        3281454
              ------------------------
                    4873262643865000
                   609157830483125
                  487326264386500
                 121831566096625
                974652528773000
               243663132193250
              365494698289875
              ------------------------
Prodotto      3997846798940344927500
```

e questo prodotto è il numero de' piedi solidi contenuti in tutto il Globo terrestre.

ARTICOLO VII.

Modo di dividere le quantità razionali intere.

126. Def. Il dividere non è altro, che ritrovare una quantità, la quale contenga tante volte l' unità, quante volte la quantità divisa contiene la quantità, con cui si fece la divisione.

127. La quantità, con cui si fa la divisione, si chiama divisore: La quantità, che devesi dividere, si dice dividendo; e ciò, che dalla divisione risulta, si dice quoziente.

128. Corol. 1. Il quoziente adunque indica che parte del dividendo sia il divisore, o sia indica quante volte il divisore entra nel dividendo, o *vice versa*.

129. Corol. 2. Quindi se si dividerà una data quantità per un' altra eguale, il quoziente sarà l' unità: o pure se si dividerà per l' unità una data quantità, il quoziente sarà la stessa quantità divisa.

130. Corol. 3. Che se due quantità eguali si divideranno per una stessa quantità, i quozienti saranno eguali.

131. Corol. 4. Se poi due quantità ineguali si divideranno per una stessa quantità, o una quantità per due ineguali; nel primo caso il quoziente, che nasce dalla divisione della quantità maggiore, sarà maggiore dell' altro quoziente, che nasce dalla divisione della quantità minore; e nel secondo caso il quoziente che nasce dalla divisione per la quantità maggiore sarà minore dell' altro quoziente, che nasce dalla divisione per la quantità minore.

132. Corol. 5. Contenendo il dividendo tante volte il divisore, quante volte il quoziente contiene l' unità, sarà (pel num. 102.) il dividendo il prodotto nato dal moltiplicare il quoziente nel divisore.

133. Corol. 6. Per lo che qualunque numero nato dalla moltiplicazione di due numeri si può considerare come dividendo nato dalla moltiplicazione di un fattore come divisore nell' altro come quoziente.

134. Corol. 7. Quindi dividendosi questo prodotto, che abbiamo chiamato dividendo, per uno de' suoi fattori, cioè o pel quoziente, o pel divisore, ne verrà l' altro per quoziente.

135. Corol. 8. E però la divisione distrugge lo che ha fatto la moltiplicazione, e conseguentemente con quella quantità, con cui si è fatta la moltiplicazione, si può fare la divisione del prodotto.

136. Corol. 9. Onde se per 2. si moltiplicherà un qualunque numero pari, o impari, il prodotto sarà sempre un numero pari, mentre si potrà dividere per 2, con cui si fece la moltiplicazione.

137. Corol. 10. Che se poi si moltiplicherà una qualche quantità per un' altra quantità, ed il prodotto si divida poscia colla stessa quantità, con cui si fece la moltiplicazione, il quoziente sarà l' altra quantità.

138. Corol. 11. S' intende per ultimo dalle cose dette, che la divisione non è altro, che una replicata sottrazione, mentre il quoziente indica quante volte il divisore si può sottrarre dal dividendo.

139. Prob. 1. Debbasi dividere una data quantità per un' altra.

140. Risol. Se tanto il divisore, come il dividendo costano di una sola figura, si osservi quante volte questa figura del divisore entra nella figura del dividendo, ed il numero delle volte, che una entra nell' altra, darà (pel num. 128.) il quoziente cercato; Come dovendosi dividere 8 per 2, perchè il 2 entra nell' 8 quattro volte, il quoziente sarà 4

141. Se il dividendo, non già il divisore, sarà un numero di più figure, si scriva il divisore a lato del dividendo separato con una linea verticale, indi sotto al dividendo si conduca una linea orizzontale; poscia si osservi quante volte il divisore entra nella prima figura a mano sinistra del dividendo, ed il quoziente si scriva sotto a tale figura: Che se il divisore non entra nella prima figura per essere tale figura minore del divisore, si prendano le due prime, e si osservi quante volte in esse entra il divisore, ed il quoziente si scriva sotto alla seconda figura; che se in questa divisione nulla avanza, si passa a vedere quante volte il divisore entra nella seguente figura, ed il quoziente si scrive sotto, e se non vi entra, sotto si scrive zero; indi si prende questa figura insieme colla seguente, e si osser-

osserva quante volte in esse entra il divisore, ed il quoziente scrivesi sotto; ed in questo modo si continua la divisione: Quando poi fatta la divisione di qualche figura avanza qualche cosa, tale avanzo si concepisce come scritto avanti alla seguente figura, e poi si osserva quante volte in esse entra il divisore, ed il quoziente si scrive sotto: Qualora nella divisione dell' ultima figura avanza qualche cosa, questo avanzo si scrive dopo il quoziente, e sotto se gli pone il divisore separato da una linea.

E S E M P I O.

142. Prob. 2. Cercasi la velocità, che aveva un mobile, il quale nello spazio di 9 minuti ha percorso con moto equabile 288067 piedi Regii di Parigi.

143. Risol. Disposti i numeri, come si vede qui sotto, si osservi quante volte il 9 numero de' minuti (perchè lo spazio percorso è il prodotto della velocità nel tempo impiegato) entra nel 2 prima figura del dividendo; e perchè non vi entra, si prendano le due prime figure 28, nelle quali il 9 entra tre volte, ed avanza uno, però sotto all' 8 scrivasi il 3, indi si concepisca l'avanzo 1 come scritto avanti alla seguente figura 8 del dividendo, onde si avrà 18, in cui il divisore entra due volte, per lo che sotto si noti 2, e non avanzando dalla divisione cosa alcuna, si passi alla seguente figura 0, in cui non entrando il 9, sotto si scriva zero; quindi si passi all'altra figura 6, in cui pure non entrando il 9, sotto si scriva zero, poscia si prenda il 6 con l' ultima figura 7, che fa 67, in cui il 9 entra sette volte, onde sotto si scriva 7, e perchè avanza 4, questo 4 si deve porre a lato del quoziente con sotto il divisore separato da una linea. Si trova pertanto, che la velocità del proposto mobile è tale, che egli in un minuto può fare piedi di Parigi $32007\frac{4}{9}$.

Tempo impiegato	Spazio percorso dal Mobile
9	288067.
Velocità cercata.	$32007\frac{4}{9}$

144. Lo stesso modo di operare si osserva, qualora non solo il dividendo, ma ancora il divisore costa di più figure: Si comincia cioè ad osservare quante volte il divisore entra in altrettante figure del dividendo, o se non vi entra, si osserva quante volte entra in altrettante figure più una: Ma perchè il più delle volte non è così facile il determinare subito quante volte un numero di più figure entra in un' altro di altrettante figure, o una più, torna comodo l' osservare il seguente metodo. Si moltiplichi primieramente il divisore per tutti i numeri da 1 fino a 9, e fatto ciò si cominci la divisione, osservando quale di questi prodotti sia eguale, o pure prossimamente minore del valore delle figure prese del dividendo, mentre il numero, dalla di cui moltiplicazione nel divisore è nato tale prodotto, indicherà il numero delle volte, che il divisore entra nelle corrispondenti figure del dividendo, o sia darà il quoziente, quale trovato, si sottri dalle prese figure del dividendo questo prodotto, ed al residuo si scriva appresso la seguente figura del dividendo; indi collo stesso metodo si osservi quante volte in questo aggregato entra il divisore, ed il quoziente si scriva sotto: Che se non vi entra, sotto si noti zero, poscia si scriva appresso al detto aggregato la seguente figura del dividendo, e così si continui l' operazione.

ESEM-

ESEMPIO.

145. Prob. 3. Cercasi che anno del Periodo Giuliano sia il prossimo passato 1769, in cui avevamo 6 d' Indizione; 3 del Ciclo Solare; e 22 del Ciclo Lunare.

146. Risol. Si moltiplichi il numero 6 dell' Indizione per 6916; 3 del Ciclo Solare per 4845; e 22 del Ciclo Lunare per 4200, e la somma di questi tre prodotti si divida per 7980, che è il Periodo Giuliano, mentre senza aver riguardo al quoziente, il residuo darà il ricercato anno del Periodo Giuliano.

Indizione		Ciclo Solare		Ciclo Lunare	
	6916		4845		4200
	6		3		22
	41496		14535		84
					84
					92400

Prodotti { 41496, 14535, 92400

Somma 148431

Periodo Giuliano, che serve di divisore

7980. 1.
15960. 2.
23940. 3.
31920. 4.
39900. 5.
47880. 6.
55860. 7.
63840. 8.
71820. 9.

Divisore	Dividendo
7980	148431
Quoz:	18
	7980
	68631
	63840
Residuo	4791

che dà l'anno cercato del Periodo Giuliano.

Moltiplico pertanto il numero 6 dell' Indizione in 6916, e mi viene di prodotto 41496; indi il 3 del Ciclo Solare in 4845, e mi viene 14535; finalmente il 22 del Ciclo Lunare in 4200, ed ho 92400, i quali tre prodotti sommati insieme

fan-

fanno 148431, che devesi dividere per 7980: Metto perciò da parte questo divisore, indi lo moltiplico per 2, per 3, per 4 ec., ed in seguito scrivo i prodotti a lato de' numeri, che moltiplicano. Fatto ciò incomincio la divisione osservando se tra' prodotti del divisore v'è il numero 14843, e perchè non c'è, prendo il numero a lui inferiore, che è lo stesso divisore, cui perchè corrisponde a lato l'unità, scrivo 1 nel luogo del quoziente, indi sottro questo numero 7980 da 14843, ed al residuo 6863 scrivo appresso la seguente figura 1 del dividendo, onde ho 68631, per dividere il quale osservo se egli si trova tra i prodotti del divisore, e perchè non c'è, prendo il numero a lui inferiore 63840, cui perchè a lato corrisponde 8, scrivo l'8 nel quoziente, poscia da 68631 sottro 63840, con che ho di residuo 4791, e però conchiudo, che il 1769 è l'anno 4791 del Periodo Giuliano.

147. Dim. della divisione. La dim. del num. 140. costa dal num. 128. Quanto poi ai num. 141, 144 il ritrovato quoziente risulta dai peculiari quozienti nati dal dividersi a parte a parte il dividendo; ma (pel num. 41.) il tutto è eguale a tutte le sue parti prese insieme; dunque lo che si è trovato è il totale quoziente cercato.

148. Ella è cosa chiara, che qualora a destra del dividendo vi saranno alcuni zeri, se fatta la divisione delle figure significative nulla avanzerà, al quoziente si aggiungeranno tutti i zeri del dividendo.

149. La divisione si può ancora indicare mediante il segno spiegato al num. 54, onde dovendosi dividere 27 per 3 si farà $\frac{27}{3}$, mettendo cioè il dividendo sopra la linea, e il divisore sotto. Questo modo però ha luogo principalmente quando si deve dividere una quantità minore per una maggiore.

ARTICOLO VIII.

Modo di fare la moltiplicazione, e la divisione con diverse spezie.

150. Prima di procedere all'operazione è necessario premettere il modo di ridurre una quantità alla spezie inferiore; ovvero alla minima, volendola ridurre all'ultima spezie.

151. Prob. 1. Debbansi ridurre alla minima spezie Tese 7, piedi 4, pollici 11, linee 9 di Parigi.

152. Risol. Poichè 6 piedi fanno una Tesa, 12 pollici un piede, e 12 linee un pollice, si moltiplichino le Tese 7 per 6, ed al prodotto si aggiungano i 4 piedi, e questo aggregato sarà di piedi, quale devesi moltiplicare per 12, ed il prodotto accresciuto degli 11 pollici, sarà di pollici. Finalmente questo aggregato si moltiplichi per 12, ed il prodotto accresciuto delle 9 linee darà il valore di Tese 7, piedi 4, pollici 11, linee 9 espresso in linee. Ecco il Calcolo.

Te-

Teſe	7
Valore corriſpondente ad ogni Teſa	6
Teſe ridotte in piedi.	42
Piedi.	4
Somma.	46
Valore corriſpondente ad ogni piede.	12
	92
	46
Piedi ridotti in pollici.	552
Pollici.	11
Somma.	563
Valore corriſpondente ad ogni pollice.	12
	1126
	563
Pollici ridotti in linee.	6756
Linee.	9
Somma.	6765

riducendoſi pertanto alla minima ſpezie Teſe 7, piedi 4, pollici 11, linee 9, ſi hanno 6765 linee.

153. Egualmente ſi opera per ridurre alla ſpezie inferiore qualunque altra quantità, avvertendo ſolamente di moltiplicare ciaſcuna ſpezie per quel numero della ſpezie proſſima inferiore, che richiedeſi a formare una unità della propoſta ſpezie: Così volendoſi ridurre a minuti meſi 2, giorni 3, ore 5, minuti 7, ſi moltiplichi il numero 2 de' meſi per 30, perchè 30 giorni fanno un meſe, ed al prodotto 60 ſi aggiungano i giorni 3, e ſi avrà 63, che deveſi moltiplicare per 24, perchè 24 ore fanno un giorno, ed al prodotto 1512 ſi aggiungano le ore 5, e ſi avranno 1517 ore, che moltiplicate per 60, perchè 60 minuti fanno un'ora, ne verranno 90020, cui aggiunti i 7 minuti ſi avranno finalmente 90027 minuti corriſpondenti a meſi 2, giorni 3, ore 5, minuti 7.

154. Dim. Il numero ritrovato riſulta dalla riſoluzione di ciaſcuna ſpezie nella ſua proſſima inferiore fino alla minima; ma il valore di una quantità non ſi varia col ridurla da una ſpezie all'altra, non altro ciò eſſendo, che una diverſa eſpreſſione; dunque la quantità ritrovata è la ſteſſa, che la propoſta, ed eſprime la ricercata ſpezie inferiore. Lo che ſi doveva dimoſtrare.

155. All'oppoſto ſi opererà, mediante cioè la diviſione, qualora ſi tratti di ridurre una data quantità di minima ſpezie alle ſpezie ſuperiori.

ESEM-

ESEMPIO.

156. Prob. 2. Cercasi quanto tempo impiegherebbe una palla di cannone a venire dal Sole a noi colla velocità dalla polve comunicatale.

157. Risol. La luce impiega 8. minuti a venire dal Sole a noi, ma la luce si muove 700000. volte più veloce, che una palla di cannone, dunque moltiplicando l'8 per 700000 si avranno 5600000 minuti, che impiegherà la detta palla per venire dal Sole a noi. Ora si riducano questi minuti 5600000 ad ore, e minuti mediante la divisione per 60, perchè 60 minuti fanno un'ora, e si avranno ore 93333, e minuti 20. Poscia si riducano queste ore 93333 a giorni, ed ore mediante la divisione per 24, perchè 24 ore fanno un giorno, e si avranno giorni 3888, ore 21: questi giorni si riducano a mesi, dividendoli per 30, perchè 30 giorni fanno un mese, e ne verranno mesi 129, giorni 18. Finalmenre si riducano questi mesi 129 ad anni, dividendoli per 12, perchè 12 mesi fanno un'anno, e si avranno per ultimo anni 10, mesi 9, giorni 18, ore 21, minuti 20, che impiegherà una palla di cannone per venire dal Sole a noi colla velocità, che gli comunica la polvere. Ecco il Calcolo.

Tempo che impiega la luce 700000. × 8.

Tempo cercato in minuti 5600000

Tempo cercato in minuti
60 | 5600000
Ore 93333: 20
540
200
180
200
180
200
180
200
180
Residuo di min. 20

Ore
24 | 93333:20
Giorni 3888:21:20
72
213
192
213
192
213
192
Resid. di ore 21

Giorni
30 | 3888:21:20
Mesi 129:18:21:20
30
88
60
288
270
Res. di gior. 18

Mesi
12 | 129 : 18 : 21 : 20
Anni 10 : 9 : 18 : 21 : 20
12
009
Residuo di mesi 9

158.

158. Probl. 3. Debbasi moltiplicare una quantità in un'altra, la quale ammetta diverse specie.

159. Risol. Si moltiplichi la quantità data nell'ultima specie dell'altra quantità, dipoi mediante la divisione si riduca questo prodotto alla specie prossima superiore, osservando se da questa divisione avanza qualche cosa, quale avanzo devesi notare sotto questa minima specie, serbando intanto il quoziente. Fatto ciò si passa a moltiplicare col solito moltiplicatore la seguente spezie, ed al prodotto si aggiunge la quantità serbata; indi mediante la conveniente divisione devesi ridurre questo aggregato alla prossima spezie superiore, scrivendo sotto il residuo, e serbando il quoziente da aggiugnersi al prodotto della seguente spezie, e così hassi a proseguire l'operazione fino in ultimo.

ESEMPIO.

160. Prob. 4. Sapendosi dall'osservazione, che ad ogni grado del Meridiano Celeste corrispondono sul nostro Globo Tese 28647, piedi 3, pollici 8, linee 4, o sia piedi 171885, pollici 8, linee 4: cercasi quanti piedi contenga il massimo cerchio della Terra.

161. Risol. Poichè il cerchio contiene 360. gradi; comincio a moltiplicare le 4 linee per 360., e mi viene di prodotto 1440, che per essere di linee, dodici delle quali fanno un pollice, lo divido per 12 affine di ridurlo in pollici, e mi vengono 120 pollici di quoziente senza alcun residuo; poscia moltiplico i pollici 8 per 360, ed al prodotto 2880 aggiungo li 120 pollici poco fa trovati, e questo aggregato 3000, che è di pollici lo divido per 12 a fine di ridurlo in piedi, e mi vengono di quoziente 250 piedi senza avanzo. Finalmente moltiplico i piedi 171885 per 360, ed al prodotto aggiunti i testè ritrovati 250 piedi ho per ultimo 61878850, che è il ricercato numero de' piedi, che contiene il massimo cerchio della Terra.

Piedi corrispondenti ad un Grado		171885 : 8 : 4	
Gradi		360	
	12	1440	Prodotto
	Pollici	120	
		2880	Prodotto
	12	3000	Somma
	Piedi	250	
		10313100	Prodotto
		515655	Prodotto
Piedi cercati		61878850	Somma

ALTRO ESEMPIO.

162. Probl. 5. Cercasi la distanza, che passa tra la Terra, e il Sole.

163. Risol. E' noto dall'osservazione, che la luce nel venire dal Sole a noi im-

impiega 8 minuti, o sia 480 secondi. Parimente si sa dall'esperienza, che si muovono con pari velocità il suono, ed una palla di cannone durante lo spazio di un miglio in circa, e che il suono percorre in un minuto secondo 190 Tese, piedi 1, pollici 11, e linee 11; ma che la luce è 700000 volte più veloce, che una palla di cannone. Stante ciò si moltiplichino 190 : 1 : 11 : 11 : per 700000, indi il prodotto si moltiplichi per 480 numero de' secondi, che impiega la luce nel venire dal Sole a noi, ed il nuovo prodotto darà il numero delle Tese, piedi, pollici, linee, che trascorre la luce nel venire dal Sole a noi, e però la distanza, che passa tra il Sole, e la Terra.

```
   190 : 1 : 11 : 11  Spazio percorso dal suono in un minuto
         700000
      ------------
12 | 7700000           Prodotto di Linee.
   |------------
Pollici 641666:8
       7700000         Prodotto di pollici.
      ------------
12 | 8341666:8         Somma.
   |------------
Piedi  695138:10:8
       700000          Prodotto di piedi.
      ------------
Somma 1395138:10:8

                 Piedi
        6 | 1395138:10:8
          |--------------
     Tese   232523:0:10:8
Tese 133000000             Prodotto
     --------------------
Somma 133232523:0:10:8
```

```
Prodotto di Tese 190 : 1 : 11 : 11 in 700000
          133232523:0:10:8
Numero de' secondi     480
          ----------------------
             12 |  3840            Prodotto di linee
                |-------
                  320:0            Pollici
                 4800              Prodotto di pollici
                -------
             12 |  5120:0          Somma
                |--------
                 6 | 426:8:0       Piedi, e pollici
                   |--------
             Tese     71:0:8:0
  10658601840  }
  5329300920   }                  Prodotto di Tese
  -----------------------
  63951611111:0:8:0               Somma di Tese
```

La distanza pertanto, che passa tra la Terra, e il Sole, è di Tese 63951611111 : 0 : 8 : 0.

164. Prob. 6. Debbasi fare la moltiplicazione di due quantità, ognuna delle quali ammetta diverse spezie.

165. Risol. Due casi circa questa operazione debbonsi distinguere. Il primo quando trattasi di trovare un area, o superficie, di cui sono dati i due lati contigui,

gui, che ne sono i fattori: Il secondo quando devesi determinare l'intiero costo di una quantità, che ammette diverse spezie, di una unità della massima spezie della quale è dato il valore. Quanto al primo caso devesi ridurre l'una, e l'altra quantità alla stessa minima spezie, poscia farne la moltiplicazione, mentre il prodotto, mediante l'opportuna divisione ridotto alle spezie superiori, sarà lo che si cerca.

ESEMPIO.

166. Prob. 7. Cercasi l'area di uno stagno, la di cui lunghezza è di Tese 543, piedi 4, pollici 9, e la larghezza è di Tese 95, piedi 2, pollici 7, linee 8.

167. Risol. Poichè la minima spezie, che ritrovasi in uno dei due fattori, è di linee, però riducasi in linee tanto la lunghezza, quanto la larghezza, e per la lunghezza si avranno 469836 linee; per la larghezza 82460 linee. Si moltiplichino l'une per l'altre, e si avranno 38742676560 linee superfiziali. Ma perchè 144 linee superfiziali fanno un pollice superfiziale; 144 pollici superfiziali fanno un piede superfiziale; e 36 piedi superfiziali fanno una Tesa superfiziale, però dividasi il ritrovato prodotto prima per 144, ed il quoziente di nuovo per 144, e questo quoziente finalmente per 36, ed avransi per l'area ricercata Tese superfiziali 51899, piedi 13, pollici 77, linee 0. Ecco il Calcolo.

```
   543  Tese
     6
  ----
  3258  Prodotto di piedi
     4
  ----
  3262  Somma di piedi
    12
 -----
  6524 } Prodotto di pollici
 3262  }
     9
 -----
 39153  Somma di pollici
    12
------
 78306 } Prodotto di linee
39153  }
------
469836  Somma di linee
```

```
    95  Tese
     6
   ---
   570  Prodotto di piedi
     2
   ---
   572  Somma di piedi
    12
  ----
  1144 } Prodotto di pollici
  572  }
     7
  ----
  6871  Somma di pollici
    12
 -----
 13742 } Prodotto di linee
 6871  }
     8
 -----
 82460  Somma di linee
```

```
Linee.    469836
Linee.     82460
       ---------
        28190160
       1879344
       939672
     3758688
     -----------
     38742676560    Prodotto di linee.
```

L' area adunque del propoſto Stagno, la di cui lunghezza è di Teſe 543, piedi 4, pollici 9; e la larghezza di Teſe 95, piedi 2, pollici 7, linee 8, trovaſi eſſere di linee ſuperfiziali 38742676560. Ora però mediante la congrua diviſione ridurremo queſta ſuperfizie a Teſe, piedi, pollici, e linee ſuperfiziali come ſegue.

Linee ſuperfiziali.

144 | 38742676560

Quoz: pollici ſuper. 269046365 : 0

288
994
864
1302
1296
667
576
916
864
525
432
936
864
720
720

Reſiduo 000

Pollici ſuperfiziali.

144 | 269046365

Quoz: piedi ſuper. 1868377 : 77 : 0

144
1250
1152
984
864
1206
1152
543
432
1116
1008
1085
1008

Reſiduo 77

Piedi ſuperfiziali.

36 | 1868377 : 77 : 0

Quoz: Teſe ſuperf. 51899 : 13 : 77 : 0

180
68
36
323
288
357
324
337
324

Reſiduo 13

L' area

L' area cercata pertanto è di Tese 51899, piedi 13, pollici 77 superficiali.

168. Quanto al secondo caso, essendo dato il valore, che compete a una unità della massima spezie della proposta quantità, che costa di diverse spezie, devesi prima di tutto determinare il valore, che compete a una unità della spezie inferiore di tale quantità, lo che si ottiene con ridurre alla spezie inferiore una unità della spezie superiore, indi ridurre alla minima spezie il valore dato, e così ridotto dividerlo per la precedente unità ridotta alla spezie inferiore, e il quoziente darà il valore, che compete a una unità della spezie inferiore della quantità proposta. Fatto ciò si riduca tale quantità alla sua minima spezie, poscia si moltiplichi pel quoziente poc' anzi trovato, e ciò, che ne viene, sarà il prodotto ricercato, che mediante la congrua divisione devesi ridurre alle spezie superiori. Lo stesso modo di operare devesi pure osservare, qualora uno solo de' fattori ammetta diverse spezie, e questo fattore non si riferisca a una unità dell' altro fattore, ovvero non sia il valore di una unità dell' altro fattore, che anzi l' altro fattore si riferisca come valore a una unità della massima spezie di questo. L' Esempio renderà chiara la regola data, e tutta l' operazione da farsi.

E S E M P I O.

169. Prob. 8. Cercasi quanto tempo impiegherà l' acqua di un Fiume a portarsi dalla sua origine al Mare, la quale distanza è di Leghe 123 (si prendono le Leghe di 4 Miglia l' una), Miglia 2, Stadii 5, mentre colla sua costante velocità per tutto questo tratto impiega due Ore, minuti 27, secondi 12 per ogni Lega. Questo Problema si dovrebbe sciogliere colla presente regola anche nel caso, che il detto Fiume impiegasse un' ora sola per ogni Lega.

170. Risol. Poichè l' acqua di questo Fiume impiega due Ore, minuti 27, secondi 12 per ogni Lega, e lo spazio da percorrersi è non solo di Leghe, ma ancora di Miglia, e di Stadii; perciò ricerco primieramente quanto tempo ella impieghi a percorrere uno Stadio, minima spezie dello spazio da percorrersi, lo che ottengo con ridurre a secondi le suddette due Ore, minuti 27, secondi 12, da cui ho 8832 secondi, che divido per una Lega ridotta a Stadii, cioè per Stadii 32, perchè a ogni Miglio corrispondono 8 Stadii, e ho di quoziente 276, onde concludo, che la detta Acqua percorre uno Stadio in 276 secondi. Avendo pertanto il tempo, che devesi a uno Stadio, riduco le Leghe 123, Miglia 2, Stadii 5 a Stadii, e me ne vengono 3957 Stadii, che moltiplico per 276 secondi, tempo dovuto a ciascuno di loro, e mi vengono di prodotto 1092132 secondi, tempo che impiega l' acqua di questo Fiume nello scorrere dalla sua origine al Mare. Se pertanto mediante la divisione per 60 (perchè un' Ora vale 60 minuti primi, ed un minuto primo vale 60 secondi) si ridurranno questi 1092132 secondi a minuti primi, e poscia ad Ore indi a giorni mediante la divisione per 24, si avranno finalmente giorni 12, Ore 15, minuti primi 22, e secondi 12, che è il tempo cercato. Ecco il Calcolo.

```
Leghe.      1
Miglia.     4
          ---
Prodotto.   4
Stadii.     8
          ---
Una Lega ridotta 32 a Stadii
```

```
              Ore   2
           Minuti  60
                  ----
                  120   Prod. di min. primi
           Minuti  27
                  ----
                  147   Somma di min. primi
  Minuti secondi   60
                 -----
                 8820   Prod. di min. sec.
         Secondi   12
                 -----
                 8832   Somma di min. sec.
```

```
Stadii     3957
Secondi     276
          -----
          23742
         27699
         7914
        -------
        1092132 Prodotto
di secondi dovuti all' intero Spazio.
```

```
Stadii  Minuti secondi
32   (  8832
        ------
           276   Quoziente di secondi
        ------
        64
        ----
        243
        224
        ----
         192
         192
        ----
Residuo  000
```

```
        Minuti secondi
60   (  1092132
        -------
Quoz. di Min. pr.   18202:12
        60
        ---
        492
        480
        ----
         121
         120
        -----
          130
          120
          ---
Residuo    12
```

```
            Leghe   123
           Miglia     4
                   ----
Prodotto di Miglia  492
           Miglia     2
                   ----
  Somma di Miglia   494
           Stadii     8
                   ----
Prodotto di Stadii 3952
           Stadii     5
                   ----
  Somma di Stadii  3957
```

Mi-

	Minuti primi			Ore
60	18202 : 12		24	303 : 22 : 12
Quoz. di Ore	303 : 22 : 12		Quoz. di gior.	12 : 15 : 22 : 12
	180			24
	202			63
	180			48
Residuo	22		Residuo	15

E però il suddetto Fiume impiegherà giorni 12, ore 15, minuti primi 22, e minuti secondi 12 a portarsi dalla sua Origine al Mare.

171. Prob. 9. Debbasi dividere una quantità per un'altra, delle quali la dividenda abbia annesse diverse spezie.

172. Risol. Col divisore dividasi la massima spezie del dividendo, e se fatta la divisione nulla avanza si passi a dividere le figure della seguente spezie, ma se avanza qualche cosa, questo avanzo devesi moltiplicare nel valor proprio della seguente spezie, aggiungendo poscia al prodotto le figure di tale spezie, e tale aggregato devesi dividere al solito: Indi lo stesso metodo si osservi nel passare da ciascun'altra spezie alla seguente.

ESEMPIO.

173. Prob. 10. Data una luce, che getta 73583 Tese, piedi 18, pollici 59, linee 4 solide d'acqua al giorno, e dovendosi derivare quest'acqua egualmente a 65 Possidenti, cercasi quanta ne deve toccare per uno.

174. Risol. Divido primieramente le Tese 73583 per 65, e trovo di quoziente 1132, e mi avanzano 3 Tese: Ma perchè una Tesa solida contiene 216 piedi solidi, però moltiplico questo residuo 3 per 216, ed al prodotto aggiungo i 18 piedi, onde ho 666 piedi solidi, che divido per 65, ed ho di quoziente 10, e 16 di residuo, che moltiplico per 1728 numero de' pollici solidi, che formano un piede solido, ed al prodotto aggiunti i 59 pollici mi risulta 27707, che divido per 65, e trovo di quoziente 426, e di residuo 17, che moltiplico per 1728 numero delle linee solide, che danno un pollice solido, ed al prodotto aggiungo le linee 4, il di cui aggregato è 29380, che divido finalmente per 65, e mi viene di quoziente 452. Adunque toccano per ciascuno de' Possidenti Tese 1132, piedi 10, pollici 426, linee 452 solide al giorno. Ecco il Calcolo.

Per-

```
                 Perſone        Teſe
                   65   | 73583:18:59:4
     Quoz. di Teſe      |  1132
                    65
                    --
                     85
                     65
                     ---
                     208
                     195
                     ---
                      133
                      130
                      ---
              Reſiduo   3

         Primo reſiduo di Teſe                  3
Piedi ſolidi corriſpondenti ad una Teſa 216
                                        ---
                     Prodotto           648
                     Piedi ſolidi        18
                                        ---
                                  65 |  666  Somma
           Quoz. di piedi ſolidi         10
                                        65
                                        --
                           Reſiduo      16

      Secondo reſiduo di piedi ſolidi     16
      Pollici corriſpondenti ad un piede 1728
                                         ----
                                          128
                  Prodotto {              32
                                        112
                                        16
                  Pollici ſolidi           59
                                       -----
                                 65 | 27707  Somma
           Quoz. di pollici ſolidi      426
                                     260
                                     ---
                                      170
                                      130
                                      ---
                                       407
                                       390
                                       ---
                       Reſiduo          17
```

Ter-

175. Prob. 11. Debbasi fare la divisione in caso, che tanto il divisore, come il dividendo; oppure il solo divisore abbia annesse diverse spezie.

176. Risol. Si riduca nel primo caso il divisore, e il dividendo alla stessa ultima spezie, lo che pure si faccia nel secondo caso, indi si faccia la divisione al solito, ed il quoziente sarà lo che si cerca.

ESEMPIO DEL PRIMO CASO.

177. Prob. 12. Essendo date le misure d'acqua, che portano due fiumi in un' ora, de' quali il primo porti piedi solidi 385461, pollici 70, linee 112; ed il secondo piedi solidi 96365, pollici 199, linee 892: cercasi quanto il primo fiume sia maggiore del secondo.

178. Risol. Riduco primieramente a linee solide i piedi 385461 : 70 : 112, e me ne vengono 1150980499696, poscia i piedi 96365 : 199 : 892, e me ne vengono 287744692924: Divido poscia il primo numero pel secondo, e venendomi di quoziente $4\frac{1728000}{287744692924}$, conchiudo che il primo fiume ha quattro volte tant' acqua, che il secondo. Ecco il Calcolo.

```
Piedi ſolidi                                   385461 : 70 : 112
Pollici ſolidi corriſpondenti ad un piede        1728               ſolido
                                               ─────────────────
                          ⎧        3083688
               Prodotto  ⎨        770922
                          ⎪      2698227
                          ⎩      385461
               Pollici ſolidi                  70
                                 ───────────────
      Somma di pollici ſolidi    666076678
               Linee ſolide           1728  corriſpondenti ad un pollice
                                 ───────────────                 ſolido
                   ⎧      5328613424
         Prodotto ⎨     1332153356
                   ⎪    4662536746
                   ⎩    666076678
         Linee ſolide                112
                        ───────────────
           Somma        1150980499696
```

```
Piedi ſolidi                                   96365 : 199 : 892
Pollici ſolidi corriſpondenti ad un piede       1728                ſolido
                                              ─────────────────
                          ⎧       770920
               Prodotto  ⎨      192730
                          ⎪    674555
                          ⎩    96365
              Pollici ſolidi              199
                                 ───────────────
    Somma di pollici ſolidi     166518919
              Linee ſolide           1728  corriſpondenti ad un pollice
                                 ───────────────                 ſolido
                   ⎧      1332151352
         Prodotto ⎨      333037838
                   ⎪    116563243 3
                   ⎩    166518919
         Linee ſolide                892
                        ───────────────
   Somma di linee      287744692924  ſolide
```

```
      Diviſore                    Dividendo
287744692924  |  1150980499696
                 ─────────────────
                          Quoz.         4 1728000/287744692924
                 1150977771696
                 ─────────────────
      Reſiduo            1728000
```

ESEM-

ESEMPIO DEL SECONDO CASO.

179. Prob. 13. Essendo data l' area della sezione di un Fiume di piedi superfiziali 18348, e data ivi la larghezza del Fiume di piedi 257, pollici 9, linee 4: cercasi la profondità del Fiume, che in tutta la sezione si suppone eguale.

180. Risol. Si riducano alla minima spezie primieramente i piedi 257 : 9 : 4, poscia i piedi 18348, i quali ultimi per essere superfiziali debbonsi moltiplicare per 144, perchè 144 pollici superfiziali fanno un piede superfiziale, indi il prodotto parimente per 144, perchè 144 linee superfiziali fanno un pollice superfiziale, onde dai piedi 18348 si avranno 380464128 linee superfiziali; dai piedi poi 257 : 9 : 4 si avranno linee 37120, con cui diviso il precedente numero 380464128 ne viene di quoziente 10249 $\frac{21248}{37120}$, che dà la ricercata profondità espressa in linee. Se pertanto si dividerà questo quoziente per 12, ed il nuovo quoziente istessamente per 12 verrassi a ridurre la ritrovata profondità a pollici, e piedi, e però si avranno piedi 71, pollici 2, linee 1 $\frac{21248}{37120}$ profondità cercata. Ecco il Calcolo.

	Piedi Pollici Linee		Piedi Superfiziali
257 : 9 : 4		18348	
12	Pollici, che fanno un piede	Pollici superf. 144	che fanno un piede superfiziale
514	Prodotto	73392	
257		73392	
9	Pollici	18348	
3093	Somma di pollici	2642112	Prodotto
12	Linee, che fanno un pollice	Linee superf. 144	che fanno un pollice superfiziale
6186	Prodotto	10568448	
3093		10568448	
4	Linee	2642112	
37120	Somma di linee	Prodotto di 380464128	linee superfiziali

Divisore	Dividendo
37120	380464128

Quoz. di linee $10249\frac{21248}{37120}$

```
380464128 | 37120
37120
-----
  92641
  74240
  ------
  184012
  148480
  ------
   355328
   334080
   ------
Residuo  21248
```

	Linee
12	$10249\frac{21248}{37120}$

Quoz. di pollici $854:1\frac{21248}{37120}$

	Pollici
12	$854:1\frac{21248}{37120}$

Quoz. di piedi $71:2:1\frac{21248}{37120}$

e però la ricercata profondità è di piedi 71, pollici 2, linee $1\frac{21248}{37120}$.

ARTICOLO IX.

Modo di esaminare la moltiplicazione, e la divisione.

181. SI fa l'esame della moltiplicazione con dividere il prodotto o pel moltiplicante, ed il quoziente deve essere il moltiplicando; o pel moltiplicando, ed il quoziente deve essere il moltiplicante (per i num. 133, 134.)

182. Si fa l'esame della divisione con moltiplicare il quoziente nel divisore, ed il prodotto deve essere il dividendo (pel num. 132.)

ARTICOLO X.

Modo di ritrovare tutti i divisori di una data quantità.

183. DEf. Una quantità dicesi misura di un'altra qualora la divide perfettamente senza residuo.

184. Prob. 1. Debbansi ritrovare tutte le parti, le quali misurano perfettamente una data quantità A.

185.

185. Risol. Si divida la quantità A pel suo minimo divisore, che deveglisi scrivere a lato, ed il quoziente B si divida pel suo minimo divisore notatogli a lato, ed il nuovo quoziente C dividasi istessamente pel suo minimo divisore ec., e così successivamente finchè risulti un quoziente, che non si possa ulteriormente dividere, nel qual caso si avranno tutti i divisori semplici della data quantità A. Per avere poi i divisori composti si moltiplichi il secondo divisore pel primo, ed il prodotto si scriva a lato del secondo divisore; poi col terzo si moltiplichino gli altri divisori superiori, ed i prodotti se gli scrivano a canto; indi col quarto si moltiplichino tutti i divisori superiori ec., e questi prodotti saranno i ricercati divisori composti.

186. Dim. Dall' operazione costa, che il primo fra i divisori semplici misura perfettamente la data quantità A, e che gli altri susseguenti divisori semplici misurano perfettamente i quozienti B, C ec., i quali misurano esattamente la quantità A; adunque anche tutti i divisori semplici misurano perfettamente la quantità A. Quanto poi ai divisori composti, essi risultano dalla moltiplicazione di parti, che misurano perfettamente la quantità A, e però essi pure la devono perfettamente misurare, in quanto che risultano da fattori, che danno un prodotto minore, o al più eguale alla data quantità A: Quindi fra questi fattori semplici non rimanendovene più alcuni, da' quali possi risultare un prodotto minore della quantità A, egli è evidente, che i divisori trovati sono tutti i divisori della proposta quantità A. Lo che si doveva dimostrare.

187. Corol. 1. Costa pertanto, che qualora una quantità misura un' altra qualunque quantità, misura ancora ogn' altra quantità, che da questa viene misurata.

188. Corol. 2. Una quantità, che misura quante si vogliono quantità, misura ancora la quantità da loro composta.

189. Corol. 3. Come pure se una quantità misurerà un' altra quantità, ed una di lei parte, misurerà eziandio l'altra parte.

ESEMPIO.

190. Prob. 2. Debbansi trovare tutti i divisori del numero 360, in cui è piacciuto ai Matematici di dividere la periferia del Circolo a motivo della moltiplicità de' suoi divisori.

191. Risol. Si scriva in A il dato numero 360, ed a lato in D si scriva il di lui minimo divisore, che è 2: Sotto al 360 si scriva il quoziente 180, il di cui minimo divisore è pure 2 da scriversegli a canto, ed il quoziente 90 si scriva sotto al 180: Questo quoziente 90 si divida pel suo minimo divisore 2, che se gli nota a canto, e sotto al 90 si scriva il quoziente 45, che poscia dividasi pel suo minimo divisore 3, onde avrassi di quoziente 15, quale devesi dividere pel suo minimo divisore 3, e finalmente il quoziente 5 devesi dividere per se stesso, ed in questo modo si avranno i divisori semplici 2, 2, 2, 3, 3, 5, trovati i quali col secondo divisore 2 si moltiplichi il primo, ed il prodotto 4 si scriva appresso al secondo divisore: Poscia col terzo divisore 2 dovrebbonsi moltiplicare i precedenti divisori 2, 2, ma perchè ritornerebbe per prodotto 4, 4, che già si è trovato, però si passi a moltiplicare il 4, ed il prodotto 8 se gli scriva a lato: Indi col quarto divisore 3 si moltiplichino i divisori superiori 2, 4, 8, ed i prodotti se gli scrivano a canto, e così di seguito. Ecco l' operazione

A	D											
3 6 0.	2.											
1 8 0.	2.	4.										
9 0.	2.	8.										
4 5.	3.	6.	12.	24.								
1 5.	3.	9.	18.	36.	72.							
5.	5.	10.	20.	40.	15.	30.	60.	120.	45.	90.	180.	360.
1.												

192 Prob. 3. Dimandaſi il numero di tutti i diviſori, che ammette una data quantità, inchiuſa però fra' diviſori l' unita.

193. Riſol. Pel num. 184. ſi trovino tutti i diviſori ſemplici della quantità propoſta, e ſotto a ciaſcuno, purchè ſiano differenti, ſi ſcriva un 2; ſe poi ve ne ſono degli eguali, eſſendo due ſi ſcriva ſotto a tutti due un 3; eſſendo tre ſotto a tutti tre ſi ſcriva un 4 ec., ed il prodotto di tutti queſti numeri ſcritti di ſotto darà il ricercato numero di tutti i diviſori.

194. Dim. Pel num. 184 dopo avere ritrovati i diviſori ſemplici, ſi hanno i diviſori compoſti con moltiplicare ciaſcuno de' diviſori ſemplici per tutti i diviſori ſuperiori: Ma colla moltiplicazione del ſecondo diviſore ſemplice pel primo ſi hanno quattro diviſori (ſuppoſto che i detti due diviſori ſemplici ſiano diverſi), cioè l' unità, il prodotto, il moltiplicando, ed il moltiplicante, il qual numero di diviſori ottimamente ſi eſprime col prodotto de' due ſottopoſti numeri 2, 2; colla moltiplicazione poi di ciaſcuno degli altri diviſori ne' diviſori ſuperiori non ſi fa altro, che raddoppiare la ſomma de' diviſori fino allora trovati, lo che fa pure la reiterata moltiplicazione per 2 del poc' anzi trovato prodotto 4. Dunque quando i diviſori ſemplici ſono tutti diverſi, il prodotto di tanti 2, quanti ſono gli ſteſſi diviſori ſemplici, darà il ricercaro numero di tutti i diviſori, compreſavi l' unità. Ma perchè poi dalla moltiplicazione di due diviſori ſimili non riſultano più quattro, ma tre diviſori, però ſotto a queſti due diviſori ſimili ſi deve ſcrivere un 3: E parimente dalla moltiplicazione di tre diviſori ſimili non riſultando, che quattro diviſori, cioè l' unità, uno di loro, e due prodotti, uno dalla moltiplicazione di due diviſori ſemplici, l' altro da queſto prodotto nel terzo diviſore ſemplice, quindi è, che ſotto a tre diviſori eguali ſi deve ſcrivere un 4. Conſeguentemente il prodotto nato dalla moltiplicazione dei 2, 3, 4 ec. a miſura, che i diviſori ſono diverſi, o eguali, darà il cercato numero di tutti i diviſori. Lo che ſi doveva dimoſtrare.

195. Volendo pertanto ſapere quanti diviſori riceva il numero 360, i di cui diviſori ſemplici abbiamo pur ora trovato eſſere 2, 2, 2, 3, 3, 5, ſe gli ſcrivano ſotto i convenienti numeri 4, 3, 2, come quì ſi vede, dal cui prodotto 24 ſi conchiude, che il propoſto numero 360 ha 24 diviſori inchiuſavi l' unità.

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot}_{4} \times \underbrace{3 \cdot 3 \cdot}_{3} \times \underbrace{5}_{2} = 24.$$

AR-

ARTICOLO XI.

Modo di ritrovare il massimo comun divisore tra due, o più quantità.

196. DEf. 1. Quella quantità, che ne misura due, o più, dicesi di loro misura comune.

197. Def. 2. Il massimo comun divisore è il maggiore fra tutti i divisori comuni.

198. Prob. 1. Date due quantità se ne debba trovare il massimo comun divisore.

199. Risol. Si divida la quantità maggiore per la minore, e senza aver riguardo al quoziente, col residuo, se v' è, si divida la quantità, che servì di divisore, e così susseguentemente, finchè si arrivi ad una divisione, in cui il residuo sia zero: Che se si arriva ad un residuo zero, in tal caso la quantità, che ultimamente servì di divisore, sarà il massimo comun divisore: Se poi mai si arriva ad un residuo, che sia zero, in tal caso le due proposte quantità non hanno alcun comun divisore, a riserva dell' unità, o sia sono due numeri primi tra loro (pel num. 29.)

200. Dim. L' ultimo divisore trovato misura il penultimo divisore, e il residuo; ed il penultimo divisore misura l' antecedente divisore, e il residuo; e così in seguito: Dunque (pel num. 187.) l'ultimo divisore trovato misura la minore delle quantità date, e l' eccesso della maggiore sopra la minore, conseguentemente misura ancora la quantità maggiore, quale non è altro, che la minore presa una, o più volte più l'eccesso, o la differenza; e però è di ambedue misura comune. Che poi egli sia la massima comune misura è manifesto, altrimenti vi sarebbe una quantità maggiore di lui, che lo misurerebbe, lo che è assurdo, perchè una quantità maggiore non può misurare una minore. Egli è adunque il massimo comun divisore. Lo che si doveva dimostrare.

201. Volendosi per Esempio il massimo comun divisore de' due numeri 3425, e 1150, si divida il primo pel secondo, e col residuo 125 si divida il divisore 1150, poscia col residuo 25 si divida il precedente divisore 125, e perchè nulla avanza il massimo comun divisore de' due proposti numeri 3425, 1150 è 25.

202. Se si dovrà ritrovare il massimo comun divisore di tre, quattro ec. quantità, si trovi primieramente il massimo comun divisore delle due prime; indi fra questo massimo comun divisore, e la terza quantità si trovi il massimo comun divisore, e collo stesso metodo si proceda fino all' ultima delle quantità date.

203. La dimostrazione è chiara per se stessa.

204. Corol. Se una quantità misurerà due, o più quantità, delle quali non sia il massimo comun divisore, misurerà ancora il loro massimo comun divisore (pel num. 187.)

ARTICOLO XII.

Modo di ritrovare i numeri perfetti.

205. ABbiamo detto al num. 33. quali siano i numeri perfetti, quelli cioè, che risultano dall' aggregato di tutte le sue parti, che li misurano senza residuo, le quali parti chiamansi parti aliquote.

206. Prob. Debbansi ritrovare quanti numeri perfetti si vogliono.

207.

207. Risol. Si prenda una serie di numeri principianti dall' unità, e superantisi continuamente pel doppio; poi di mano in mano si sommino i numeri di questa serie, e quando tale somma risulta un numero primo, si moltiplichi tale somma nell' ultimo de' numeri sommati, ed il prodotto sarà numero perfetto; e collo stesso metodo si proceda a piacere.

208. Dim. Il ritrovato numero primo è (per Ipotesi) la somma dei numeri della serie presi fino a tal punto, quindi moltiplicando questo numero primo nell' ultimo de' numeri sommati, il prodotto sarà un numero, che inchiuderà tante di queste somme, quante unità sono nell' ultimo de' numeri sommati (pel num. 104.) Ma poichè il numero primo non ha parti aliquote, il detto prodotto avrà per parti aliquote i sommati numeri della serie, e di più i prodotti (pe' num. 184, 185.), che nascono dal moltiplicarsi il detto numero primo in ciascuno de' numeri della serie sommati a riserva dell' ultimo. Ora la somma di questi prodotti, o sia parti aliquote, è eguale a tante somme de' presi numeri della serie, quante unità meno una sono nell' ultimo numero sommato; dunque se a queste parti aliquote si aggiungerà la somma delle altre parti aliquote, che sono i dati termini della serie, si avranno appunto tante somme quante unità sono nell' ultimo termine sommato: Conseguentemente il ritrovato prodotto risulta dalla somma di tutte le sue parti aliquote, e però egli è un numero perfetto. Lo che si doveva dimostrare.

ESEMPIO.

Ordine de' numeri da sommarsi	Somma		Numeri perfetti.
1.			
2.	3	primo	6
4.	7	primo	28
8.	15	composto	
16.	31	primo	496
32.	63	composto	
64.	127	primo	8128
128.	255	composto	
256.	511	composto	
512.	1023	composto	
1024.	2047	composto	
2048.	4095	composto	
4096.	8191	primo	33550336

e collo stesso metodo si continui.

CA-

CAPO II.

DEL CALCOLO DELLE FRAZIONI.

ARTICOLO I.

Della enunciazione, e natura delle Frazioni.

209. Siccome il numero intiero non altro esprime (pel num. 20.), che il rapporto di una quantità ad un'altra più piccola, che si prende per l'unità, così la frazione non altro esprime, che il rapporto di una certa quantità ad un'altra più grande, che considerasi come l'unità; e però siccome il numero intero è quello, che viene misurato dall'unità, così la frazione misura l'unità, o sia è una certa parte dell'unità; o pure vale alcune parti dell'unità considerata come un tutto, o vero di qualunque altra quantità divisibile in un certo numero di parti: E però la frazione si riferisce all'unità, come la parte al tutto.

210. La Frazione si esprime per mezzo di due numeri scritti uno sopra l'altro, e separati da una linea così $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{7}$ ec.

211. Def. 1. Il numero scritto sopra la linea dicesi numeratore: Il numero scritto sotto la linea chiamasi denominatore.

212. L'uffizio del denominatore è d'indicare in quante parti sia stato diviso il tutto: Il numeratore poi esprime quante di queste parti si sono prese: Per lo che riferendosi la frazione all'unità, come la parte al tutto (pel num. 209.), ella starà all'unità come il numeratore al denominatore.

213. Corol. Dunque questa espressione $\frac{3}{5}$ vorrà dire, che delle cinque parti, nelle quali è stata divisa l'unità, se ne debbono prendere tre, e però si leggerà tre quinti: Così questa $\frac{6}{7}$ vorrà dire sei settimi ec.

214. Dalla imperfetta, ed impossibile divisione nascono le frazioni, qualora cioè non si può fare l'attuale divisione, e però la frazione indica una divisione da farsi del numeratore pel denominatore, esibendo ella intanto il quoziente di tale divisione.

215. Corol. Quindi se il numeratore sarà lo stesso del denominatore, la frazione non significherà altro che l'unità (pel num. 129.)

216. Poichè (pel num. 209.) la frazione esprime le parti di un tutto, a misura che maggiore, o minore sarà il tutto, maggiore ancora, o minore sarà la frazione: Come il 24 è quattro quinti del 30, ed il 12 è quattro quinti del 15, ma i $\frac{4}{5}$ del 30 sono tanto maggiori de' $\frac{4}{5}$ del 15, quanto il 30 è maggiore del 15.

217. Quando i denominatori delle frazioni passano la decina si proferiscono colla desinenza in esimi: Così $\frac{3}{16}$ tre sedicesimi; $\frac{8}{40}$ otto quarantesimi ec.

218. Def 2. Frazione propriamente frazione è quella, in cui il numeratore è minore del denominatore, e però equivale a qualche parte dell' intero: Come $\frac{2}{9}$.

219. Def. 3. Frazione impropria è quella, in cui il numeratore è maggiore del denominatore, e però essa equivale (pel num. 212.) ad uno, o più interi, o ad interi con frazione a misura, che il numeratore contiene il denominatore; cioè se il numeratore conterrà precisamente alcune volte il denominatore, la frazione sarà eguale a più interi, come $\frac{12}{4}$ è eguale a tre unità; se poi lo conterrà alcune volte con qualche residuo, la frazione sarà eguale a più interi con frazione, come $\frac{18}{5}$ è eguale a tre unità, e tre quinte parti dell' unità.

220. Quando una frazione viene dopo un intero, ella esprime sempre alcune parti di una di quelle unità, dalle quali risulta l' intero. Per esempio allora quando i Fisici dicono, che un Corpo, il quale su la superfizie della Terra pesa una libbra, su la superfizie del Sole ne peserebbe 24 $\frac{16}{41}$, vogliono dire che peserebbe 24 libbre, e sedici quarantunesime parti di una libbra.

221. Teor. 1. Una frazione sussisterà sempre la stessa comunque si mutino il di lei numeratore, e denominatore, purchè il rapporto di uno all' altro si mantenga sempre lo stesso: Per lo che queste Frazioni $\frac{2}{4}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{12}{24}$ sono tutte eguali, o sia esprimono tutte lo stesso.

222. Dim. Il valore della Frazione si ripete (pel num. 209.) dal rapporto del numeratore al denominatore; ma (per Ipotesi) si fa mutazione de' termini senza cambiare questo rapporto; dunque la Frazione sussiste tuttavia la stessa.

223. Dal ripetersi il valore delle Frazioni dal rapporto del numeratore al denominatore, o sia dalla maniera, colla quale il numeratore è contenuto nel denominatore, se la Frazione è propria, e *vice versa* se la Frazione è impropria, nascono alcune conseguenze da osservarsi.

224. Corol. 1. Se due, o più Frazioni avranno lo stesso denominatore, quella sarà maggiore, il di cui numeratore sarà maggiore.

225. Corol. 2. Se poi due, o più Frazioni avranno lo stesso numeratore, quella sarà maggiore, che avrà minore denominatore.

226. Corol. 3. Quindi coll' accrescersi il numeratore si accrescerà, e col diminuirsi si diminuirà il valore di una data Frazione: E pel contrario coll' accrescersi il denominatore ella si diminuirà, e col diminuirsi si accrescerà.

227. Corol. 4. E però se si accrescerà egualmente il numeratore, e il denominatore di una data Frazione con moltiplicare l' uno, e l' altro per una stessa quantità; o se si diminuirà egualmente il numeratore, e il denominatore dividendo l' uno, e l' altro per una stessa quantità, ne risulterà sempre una Frazione eguale alla proposta.

228. Da ciò nasce la maniera di ridurre a minimi termini una Frazione, niente altro richiedendosi, che dividere tanto il numeratore, come il denominatore pel massimo comun divisore, mentre i due quozienti daranno il numeratore, e il denominatore della Frazione cercata. Il motivo di ridurre le Frazioni a minimi termini si è per poterle più facilmente calcolare: Essendo per Esempio data la Frazione $\frac{78}{108}$, ella sarà eguale a $\frac{13}{18}$ con dividere il numeratore 78, e il denominatore 108 pel loro massimo comun divisore 6.

229.

229. Corol. 5. Rendesi per ultimo manifesto, che data una quantità intera, potrassi, quando si voglia, rappresentare a modo di frazione col notarci sotto l'unità: Così l'8 per esempio si esprimerà a modo di frazione facendo $\frac{8}{1}$.

230. Prob. Debbasi ridurre in interi una data frazione impropria.

231. Risol. Si divida il numeratore pel denominatore, ed il quoziente esprimerà il numero degl' interi, a' quali equivale la proposta frazione.

232. Dim. Pel num. 128. il ritrovato quoziente indica che parte del numeratore sia il denominatore; ma (pel num. 212.) il rapporto del numeratore al denominatore è lo stesso, che quello della frazione all' unità; dunque il ritrovato quoziente esprime quante volte l'unità si contiene nella data frazione, e però esprime l'intero, a cui essa equivale. Lo che ec.

233. Che se dalla divisione del numeratore pel denominatore rimarrà qualche cosa, la proposta frazione sarà eguale ad altrettanti interi, quanti vengono indicati dal quoziente intero, e di più ad una frazione, il di cui numeratore sarà l'avanzo trovato, e il denominatore sarà lo stesso della frazione proposta.

234. L'operazione è la stessa, quantunque la frazione data sia frazione di minima spezie, se non che l'intero trovato dovrassi ridurre, mediante la congrua divisione, alle spezie superiori.

E S E M P I O.

235. Prob. 2. Dall'Esperienze dell'Ugenio costa, che lo spazio percorso da un grave nel Vacuo è di $\frac{39133}{18}$ di linee del Regio piede di Parigi in un secondo. Cercansi i piedi, pollici, e linee, a cui corrisponde questa frazione.

236. Risol. Divido il numeratore 39133 pel denominatore 18, e mi viene di quoziente 2174 $\frac{1}{18}$, cioè 2174 linee, e un diciottesimo di linea. Mediante poi la divisione per 12 riduco queste 2174 linee a pollici, indi a piedi, e mi vengono piedi 15, pollici 1, linee 2 $\frac{1}{18}$, che in un minuto secondo percorre un grave cadente nel Vacuo. Ecco il Calcolo.

Denominatore 18	Numeratore 39133
Quoz. di linee	2174 $\frac{1}{18}$
	36
	31
	18
	133
	126
	73
	72
	Residuo 1

Linee

12 | 2 1 7 4 $\frac{1}{18}$

Quoz. di pollici. 1 8 1 : 2 $\frac{1}{18}$

1 2

9 7
9 6

1 4
1 2

Residuo di linee 2

Pollici

12 | 1 8 1 : 2 $\frac{1}{18}$

Quoz. di piedi. 1 5 : 1 : 2 $\frac{1}{18}$

1 2

6 1
6 0

Residuo di pollici 1

237. Prob. 3. Debbasi ridurre una data quantità intera a frazione, che abbia un proposto denominatore.

238. Risol. Si moltiplichi la data quantità intera pel proposto denominatore, ed al prodotto si sottoscriva il detto denominatore.

239. Dim. Pel num. 135 la divisione distrugge lo che ha fatto la moltiplicazione; ma nel presente caso non si fa altro, che moltiplicare la quantità data, e poi dividerla per lo stesso denominatore; dunque la ritrovata frazione è eguale al proposto intero. Lo che ec.

240. Se sarà dato un'intero con una frazione da ridursi tutto a frazione della stessa denominazione della frazione data, devesi moltiplicare l'intero pel denominatore della frazione, ed al prodotto aggiungervi il numeratore della frazione, indi dare a questo aggregato il denominatore stesso della frazione.

241. Istessamente si opera rispetto ad una quantità, che ammetta diverse spezie, se non che devesi ella prima ridurre alla sua minima spezie.

E S E M P I O.

242. Prob. 4. Debbansi ridurre i poc'anzi ritrovati piedi 15 : 1 : 2 $\frac{1}{18}$ a frazione, che abbia per denominatore 18.

243. Risol. Riduco primieramente a linee i piedi 15 : 1 : 2 $\frac{1}{18}$, e mi vengono linee 2174 $\frac{1}{18}$, che moltiplico pel denominatore 18, ed al prodotto aggiungo il numeratore 1, onde ho 39133, cui sottoscrivo il 18, ed ho fatto lo che si cercava. Ecco il Calcolo.

Pie-

Piedi. Pollici. Linee
15: 1: $2\frac{1}{18}$

Pollici corrispondenti ad un piede. 12

Prodotto { 30 / 15

Pollici. 1

181 Somma di pollici
Linee corrisp. 12 ad un pollice

Prodotto { 362 / 181

Linee. $2\frac{1}{18}$

$2174\frac{1}{18}$ Somma di linee.

Linee
2174
Denominatore 18

Prodotto { 17392 / 2174
Numeratore 1

39133 Somma

Frazione cercata $\frac{39133}{18}$

244. Prob. 5. Si debba ridurre una data frazione ad un'altra, che abbia un proposto denominatore, e sia eguale alla prima.

245. Risol. Si moltiplichi il numeratore della data frazione pel denominatore proposto, ed il prodotto si divida pel denominatore della frazione, che se la divisione si farà esatta, con dare al quoziente per denominatore il denominatore proposto si avrà la frazione cercata: Che se la divisione non verrà esatta, dovrassi dare al quoziente il denominatore proposto, ed al residuo si sottoscriverà il denominatore della frazione, che ha servito di divisore, e questa seconda frazione sarà una frazione di frazione, di cui parleremo al num. 297.

246. Il modo di operare è lo stesso qualora si tratta di ridurre un'intero con frazione a frazione eguale, e di un proposto denominatore, se non che devesi prima ridurre a frazione (giusta il num. 240.) il dato intero con frazione. Lo stesso pure si osservi qualora l'intero abbia annesse diverse spezie, facendone prima la riduzione, come si è detto al num. 241. La dim. nasce dalla dim. data al num. 239.

ESEMPIO.

247. Prob. 6. Supposto il diametro del Sole di 100. parti, hanno trovato gli Astronomi, che il diametro di Saturno è di $7\frac{5}{10}$; quello di Giove di 10; quello di Marte di $\frac{55}{100}$; quello di Venere 1; quello di Mercurio $\frac{54}{100}$. Ora si cerca,

che ciascuno di questi diametri sia espresso con una frazione, che abbia per denominatore il 1000.

248. Risol. Quanto al diametro di Saturno, che è $7\frac{5}{10}$, lo riduco prima a decimi, e sarà $\frac{75}{10}$, poi a millesimi con moltiplicare il numeratore 75 per 1000, ed il prodotto 75000 lo divido per 10 denominatore, ed al quoziente 7500 sottoscrivo il 1000, onde ho $\frac{7500}{1000}$ per la frazione cercata: istessamente le frazioni esprimenti gli altri diametri saranno di Giove $\frac{10000}{1000}$, di Marte $\frac{550}{1000}$, di Venere $\frac{1000}{1000}$ di Mercurio $\frac{540}{1000}$, a' quali aggiugneremo quello della Luna, che è $\frac{285}{1000}$.

249. Prob. 7. Data una frazione debbasi determinare il valore, che gli corrisponde in unità delle spezie inferiori competenti all'intero, cui la data frazione si riferisce.

250. Risol. Si moltiplichi il numeratore della frazione data pel numero, che caratterizza quella tale spezie, con cui si vuol determinare il valore della frazione, indi il prodotto si divida pel denominatore della frazione, ed il quoziente darà il valore cercato espresso con numero intero se la divisione si potrà fare esatta, o con intero, e rotto se la divisione non si potrà fare esattamente.

251. Dim. Questa operazione non consiste in altro, che ridurre la proposta frazione ad un'altra eguale, che abbia per denominatore il numero delle parti, in cui si divide l'intero; dunque il quoziente trovato è eguale alla frazione proposta, e però esprime il ricercato valore. Lo che dovevasi dimostrare.

ESEMPIO.

252. Prob. 8. Essendosi osservato che le Montagne più elevate non eccedono l'altezza di $\frac{1}{859}$ del semidiametro terrestre; cercasi cosa corrisponda a questa frazione in Tese, piedi, pollici, e linee.

253. Risol. Poichè il semidiametro terrestre è di Tese 1607394, però si moltiplichi col numeratore 1 della frazione questo numero, ed il prodotto 1607394 si divida pel denominatore 859, e si avrà di quoziente Tese $1871\frac{205}{859}$. Ora per sapere a quanti piedi corrisponde la frazione $\frac{205}{859}$, che è frazione di Tese, ed ogni Tesa vale sei piedi, però si moltiplichi il numeratore 205 per 6, ed il prodotto 1230 si divida pel denominatore 859, e si avranno di quoziente piedi $1\frac{371}{859}$. Si cerchi ora quanti pollici vale la frazione $\frac{371}{859}$ di piedi con moltiplicare il numeratore 371 per 12, perchè 12 pollici fanno un piede, ed il prodotto 4452 diviso pel denominatore 859 lascia di quoziente pollici $5\frac{157}{859}$. Finalmente si trovi il valore in linee della frazione $\frac{157}{859}$ di pollici con moltiplicare il numeratore 157 per 12, perchè un pollice

lice vale 12 linee, ed il prodotto 1884 diviso pel denominatore 859 dà di quoziente linee 2 $\frac{166}{859}$. Onde concludo, che le più elevate Montagne hanno di altezza Tese 1871, piedi 1, pollici 5, linee 2 $\frac{166}{859}$.

859 | 1607394 X 1
Quoz. di Tese 1871 $\frac{205}{859}$

```
 859
 7483
 6872
 6119
 6013
 1064
  859
Residuo 205
```

Tese 205 X 6 = 1230 piedi.

Piedi
859 | 1230
Quoz. di piedi 1 $\frac{371}{859}$

```
 859
Residuo 371
```

Piedi
| 371 X 12 = 4452 pollici

Pollici
859 | 4452
Quoz. di pollici 5 $\frac{157}{859}$

```
 4295
Residuo 157
```

Pollici
157 X 12 = 1884 linee

Linee
859 | 1884
Quoz. di linee 2 $\frac{166}{859}$

```
 1718
Residuo 166
```

254. Prob. 9. Si debbano ridurre allo stesso denominatore due, o più frazioni.

255. Risol. Si moltiplichi il numeratore, e il denominatore della prima frazione pel denominatore della seconda; indi il numeratore, e denominatore della seconda pel denominatore della prima, e le due nuove frazioni, che ne verranno saranno le ricercate.

256. Dim. Poichè il numeratore, e denominatore della prima frazione è stato moltiplicato per una stessa quantità, la nuova frazione è eguale alla prima (pel num. 227.); lo che pure è della seconda: Dunque le due ritrovate frazioni sono eguali alle date, ed hanno lo stesso denominatore, che è il prodotto di un denominatore nell' altro.

257. Se le frazioni saranno più di due, si riducano in primo luogo allo stesso denominarore le due prime; indi queste due colla terza; poscia queste tre colla quarta ec.

E S E M P I O.

258. Prob. 10. Dati due corpi di egual volume, ma di comunque ineguale quantità di materia; cercasi la somma de' pori, o spazii vacui de' detti due corpi.

259. Risol. Siano due palle, una di ferro, e l'altra di legno, e quella di ferro pesi 100 volte più di quella di legno, o sia contenga cento volte più di materia: siccome anche nella palla di ferro vi sono i suoi pori, si supponga, che la materia di questa palla sia ridotta ad uno spazio interamente pieno, che si supponga eguale ad $\frac{1}{1000}$ di tutta la palla. Se la materia della palla di legno si ridurrà parimente ad uno spazio interamente pieno, ella non occuperà, che $\frac{1}{100000}$ di tutta la palla, perchè la palla di legno contiene 100 volte meno di materia, che la palla di ferro. Ora per paragonare questi due spazii pieni bisogna ridurre queste due frazioni $\frac{1}{1000}$, e $\frac{1}{100000}$ alla stessa denominazione, e si avrà $\frac{100000}{100000000}$, e $\frac{1000}{100000000}$, o sia (pel num. 228.) $\frac{100}{100000}$, e $\frac{1}{100000}$. Esprimendo pertanto $\frac{100}{100000}$ lo spazio pieno nella palla di ferro, se da 100000 si sottrerà 100, resterà *99900*, e però $\frac{99900}{100000}$ saranno le rimanenti parti della stessa palla, che resteranno vacue, mentre che (operando istessamente rispetto alla frazione $\frac{1}{100000}$) i pori, o spazii vacui della palla di legno saranno espressi dalla frazione $\frac{99999}{100000}$; e però gli spazii vacui nella palla di ferro saranno espressi dal numero *99900*, e quelli della palla di legno dal numero *99999*. Ecco il calcolo.

$$\frac{1}{1000} \times 100000 = \frac{100000}{100000000} = \frac{100}{100000} \quad \Big\| \quad \frac{1}{100000} \times 1000 = \frac{1000}{100000000} = \frac{1}{100000}$$

	100000		100000
Numero da sottrarsi	100	Numero da sottrarsi	1
Residuo, che esprime gli spazii vacui della palla di ferro	99900	Residuo che esprime gli spazii vacui della palla di legno.	99999

260. Prob. 11. Si debba ritrovare un numero, che abbia le tali ricercate parti; per esempio $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$ ec.

261. Risol. Si moltiplichino insieme tutti i denominatori, ed il prodotto, che ne risulta, sarà il numero ricercato, che nel presente caso è 840.

262. Dim. Poichè (pel num. 135.) la divisione distrugge lo che ha fatto la moltiplicazione, e però con quel numero, con cui si è fatta la moltiplicazione, si può fare la divisione del prodotto; risultando il ritrovato numero dal prodotto di tutti i denominatori, si potrà conseguentemente per ciascun di loro dividerlo, e però essi saranno le di lui parti. Lo che si doveva dimostrare.

ARTICOLO II.

Modo di fare la Somma, e la Sottrazione delle Frazioni, e degl' interi con frazioni.

263. PRob. 1. Si debbano sommare insieme più frazioni, o sottrarne una da un'altra.

264. Risol. Se le frazioni proposte non hanno lo stesso denominatore, vi si riducano (pel num. 254.), indi quanto al primo caso si sommino insieme i loro numeratori, e a questa somma si dia per denominatore il denominatore comune: Quanto al secondo caso si sottri il numeratore minore dal maggiore, ed al residuo si sottoscriva il comune denominatore.

265. Dim. Poichè le date frazioni hanno (per Ipotesi) lo stesso denominatore, i loro numeratori esprimono le parti di una stessa unità egualmente divisa in parti; dunque basterà sommare codesti numeratori per avere nel primo caso la somma di tutte le parti della stessa unità, che venivano espresse dalle varie date frazioni; e nel secondo caso basterà sottrarre il numeratore minore dal maggiore per avere la differenza, che passa tra il numero maggiore di parti espresse dalla prima frazione, e il numero minore delle stesse parti espresse dalla seconda. Lo che dovevasi dimostrare.

266. Che se si dovrà sommare un'intero con una frazione, o sottrarre una frazione da un'intero, si riduca prima l'intero a frazione della stessa denominazione (giusta il num. 237.), indi si faccia la somma, o la sottrazione giusta il numero 263.

267. Parimente dovendosi sommare, o sottrarre quantità intere con frazioni, si sommino, o si sottrino prima le frazioni, poscia le quantità intere, avvertendosi solamente nella sottrazione, che se la frazione da sottrarsi sarà maggiore di quella, da cui si deve fare la sottrazione, in tal caso si levi una unità dall'annessa quantità intera, da cui devesi fare la sottrazione, e questa unità ridotta a frazione della stessa denominazione dell'annessa frazione, si sommi colla medesima, onde vi si possa sottrarre l'altra.

268. Lo stesso intendasi pure se le quantità intere avranno annesse diverse spezie.

ESEMPIO.

269. Prob. 2. Essendo appesi ai due bracci di una Bilancia diversi pesi, cioè i pesi A, B, C nel braccio destro della Bilancia in tre diverse distanze dal centro; e nel braccio sinistro i pesi D, E, F parimente in comunque diverse distanze dal centro, le quali distanze essendo date, come pure essendo cogniti i pesi, si sapranno pure i momenti a ciascun di loro corrispondenti, perchè il momento ri-

sul-

ſulta dal moltiplicarſi il peſo nella diſtanza; e però il momento di A ſia 31 $\frac{1}{3}$; di B 28 $\frac{2}{5}$; di C 15 $\frac{1}{2}$; di D 19 $\frac{3}{4}$; di E 26 $\frac{5}{7}$; di F 11 $\frac{4}{5}$: Cercaſi ſe ſi avrà ne' due bracci equilibrio, o ſe uno preponderérà, e quale, e con che momento.

270. Riſol. Si ſommino i tre momenti di A, B, C; indi di D, E, F, e perchè la ſomma di quelli ſupera la ſomma di queſti, il braccio deſtro preponderérà. Per fare la ſomma dei momenti di A, B, C ſi riducano le loro frazioni primieramente allo ſteſſo denominatore, onde ſi avrà $\frac{10}{30}$, $\frac{12}{30}$, $\frac{15}{30}$, le quali ſommate danno $\frac{37}{30}$, cioè (pel num. 230.) 1 $\frac{7}{30}$, che con gl' interi 31, 28, 15 montano a 75 $\frac{7}{30}$. Iſteſſamente per ſommare i momenti di D, E, F ſi riducano prima le loro frazioni allo ſteſſo denominatore, onde ſiano $\frac{105}{140}$, $\frac{100}{140}$, $\frac{112}{140}$, la di cui ſomma è $\frac{317}{140}$, cioè (pel num. 230.) 2 $\frac{37}{140}$, che con gl' interi 19, 26, 11 fa 58 $\frac{37}{140}$. Ora per ſapere il momento, con cui il braccio deſtro prepondera, ſi ſottri dal 75 $\frac{7}{30}$ il 58 $\frac{37}{140}$, per lo che fare ſi riducano prima alla ſteſſa denominazione i rotti $\frac{7}{30}$, $\frac{37}{140}$, e ſi avrà $\frac{980}{4200}$, $\frac{1110}{4200}$: Ma perchè il numeratore di queſta ſeconda frazione, che compete al 58. è maggiore del numeratore della prima, da cui in conſeguenza non ſi può ſottrarre, però ſi levi una unità dal numero 75, con che reſterà 74, e queſta unità ſi riduca a frazione, cha abbia per denominatore 4200, onde ſarà $\frac{4200}{4200}$, che ſi ſommi colla frazione $\frac{980}{4200}$, e ſi avrà $\frac{5180}{4200}$, da cui ſottraendoſi la frazione $\frac{1110}{4200}$ reſta $\frac{4070}{4200}$; in ſeguito poi ſottraendoſi 58 da 74, ſi ha 16 $\frac{4070}{4200}$, che è il momento cercato, con cui il braccio deſtro prepondera.

Frazioni da ridurſi allo ſteſſo denominatore

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{15}$

$\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{15}$

$\frac{5}{15} \times 2 = \frac{10}{30}$

$\frac{6}{15} \times 2 = \frac{12}{30}$

$\frac{1}{2} \times 15 = \frac{15}{30}$

Frazioni da ridurſi allo ſteſſo denominat.

$\frac{3}{4}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{4}{5}$

$\frac{3}{4} \times 7 = \frac{21}{28}$

$\frac{5}{7} \times 4 = \frac{20}{28}$

$\frac{21}{28} \times 5 = \frac{105}{140}$

$\frac{20}{28} \times 5 = \frac{100}{140}$

$\frac{4}{5} \times 28 = \frac{112}{140}$

Mo-

Momenti colle frazioni ridotte allo stesso denominatore.

$31 \frac{10}{30}$	$19 \frac{105}{140}$
$28 \frac{12}{30}$	$26 \frac{100}{140}$
$15 \frac{15}{30}$	$11 \frac{112}{140}$
Somma delle $1 \frac{7}{30}$ frazioni.	Somma $2 \frac{37}{140}$ delle frazioni.
Somma $75 \frac{7}{30}$ totale.	Somma $58 \frac{37}{140}$ totale.

Quantità da cui devesi fare la sottrazione $75 \frac{7}{30}$

Quantità da sottrarsi $58 \frac{37}{140}$

o sia riducendo le frazioni allo stesso denominatore

$\frac{7}{30} \times 140 = \frac{980}{4200}$ Ora facendo la sottrazione $75 \frac{980}{4200}$ o sia $74 \frac{5180}{4200}$

$\frac{37}{140} \times 30 = \frac{1110}{4200}$ $58 \frac{1110}{4200}$ $58 \frac{1110}{4200}$

Si avrà di residuo $16 \frac{4070}{4200}$

ARTICOLO III.

Modo di moltiplicare le frazioni, e gl' interi con frazioni.

271. PRob. 1. Debbansi moltiplicare fra loro due, o più rotti.

272. Risol. Si moltiplichino insieme tutti i numeratori, ed al prodotto, come nuovo numeratore, si dia per denominatore il prodotto di tutti i denominatori.

273. Dim. Qualora si cerca il prodotto di una frazione in un' altra, non altro si vuole, se non che della frazione moltiplicanda si prenda quella parte, che viene denominata dalla frazione moltiplicante: Ma (pel num. 226.) si accresce il valore di una frazione con moltiplicare per qualche quantità il suo numeratore, e all' opposto si diminuisce con moltiplicare il suo denominatore; dunque per averne un prodotto, che sia la parte denominata dalla frazione moltiplicante, si dovranno moltiplicare i numeratori, e i denominatori fra loro. Lo che si doveva ec.

274. Dovendosi moltiplicare un' intero per una frazione, si esprima l' intero a modo di frazione con sottoscriverci l' unità, indi si operi giusta il num. 272.

275. Che se si dovrà moltiplicare un intero per un'intero, che abbia annessa una frazione, si rappresenti il primo intero a modo di frazione con sottoscriverci l'unità, ed il secondo intero con frazione si riduca a frazione della stessa denominazione della frazione annessa (giusta il num. 240.); poscia si moltiplichino queste due frazioni come si è detto al num. 272.

276. Se poi si dovrà moltiplicare un' intero con frazione per un' intero con frazione, si riduca prima l' uno, e l' altro a frazione della stessa denominazione della frazione annessa (giusta il num. 240.); indi si operi nel modo prescritto al num. 272.

E S E M P I O.

277. Prob. 2. Dovendosi fare lo scavo di un Canale lungo Tese $27385\frac{3}{4}$, largo Tese $86\frac{2}{5}$, e profondo (ragguagliato lo scavo ove più, ove meno) Tese $22\frac{5}{7}$: Si cerca quante Tese solide di terra si dovranno trasportare da questo scavo, e però quanto si dovrà spendere in tutta l' opera, stante l' accordo di Soldi $37\frac{1}{2}$ per Tesa solida, che si trasporta.

278. Risol. Si riduca a frazione tutta la lunghezza, e la larghezza, e si avrà per la lunghezza $\frac{109543}{4}$, e per la larghezza $\frac{432}{5}$: si moltiplichi l' una per l' altra, e si avrà $\frac{47322576}{20}$, quale si moltiplichi per l'altezza $22\frac{5}{7}$ ridotta a frazione, cioè per $\frac{159}{7}$, e si avrà $\frac{7524289584}{140}$, che esprime il numero delle Tese solide di terra da trasportarsi. Ora per avere l' intero costo di questo trasporto si moltiplichi la detta frazione $\frac{7524289584}{140}$ per $37\frac{1}{2}$ ridotti a frazione, cioè per $\frac{75}{2}$, e ne verrà $\frac{564321718800}{280}$, o sia, dividendo il numeratore pel denominatore 2015434710, soldi, che è il costo cercato. Ecco il Calcolo.

Lunghezza

$27385\frac{3}{4} = \frac{109543}{4}$

Larghezza

$86\frac{2}{5} = \frac{432}{5}$

$$\text{Numeratori} \begin{cases} 109543 \\ 432 \end{cases} \qquad \text{Denominatori} \begin{cases} 4 \\ 5 \end{cases}$$

```
   219086
  328629
 438172
---------
 47322576  Prodotto de' numeratori.
```

20 Prodotto de'denom.

Pro-

Prodotto della lunghezza nella larghezza.

$$\frac{47322576}{20}$$

Profondità

$22\frac{5}{7} = \frac{159}{7}$ da moltiplicarsi con $\frac{47322576}{20}$

Numeratori { 47322576 / 159   Denom. { 20 / 7

```
 425903184
236612880
47322576
----------
7524289584   Prodotto de' numeratori.
```

140 Prodotto de' denom.

Prodotto della lunghezza, larghezza, e profondità

$$\frac{7524289584}{140}$$

Prezzo per ogni Tesa solida

$37\frac{1}{2} = \frac{75}{2}$ da moltiplicarsi nel numero delle Tese solide $\frac{7524289584}{140}$

Numeratori { 7524289584 / 75   Denom. { 140 / 2

```
 37621447920
52670027088
------------
564321718800   Prodotto de' numeratori
```

280 Prodotto de' denom.

Prezzo di tutto lo scavo $\frac{564321718800}{280}$ in soldi.

 Fi-

Finalmente si faccia l' attual divisione del numeratore pel denominatore così

```
Denominatore              Numeratore

280   | 5 6 4 3 2 1 7 1 8 8 0 0
        -----------------------
Quoz. di soldi   2 0 1 5 4 3 4 7 1 0
        5 6 0
        -----
          4 3 2
          2 8 0
          -----
          1 5 2 1
          1 4 0 0
          -------
            1 2 1 7
            1 1 2 0
            -------
              9 7 1
              8 4 0
              -----
              1 3 1 8
              1 1 2 0
              -------
                1 9 8 8
                1 9 6 0
                -------
                    2 8 0
                    2 8 0
                    -----
Residuo             0 0 0
```

Riduzione dei soldi 2 0 1 5 4 3 4 7 1 0 a lire

```
                20 | 2 0 1 5 4 3 4 7 1 0
                     -------------------
Quoz. di lire        1 0 0 7 7 1 7 3 5 : 1 0
```

e però il proposto scavo costa lire 1 0 0 7 7 1 7 3 5, soldi 10.

279. Dovendosi moltiplicare una frazione con un'intero, che abbia annesse diverse spezie, si riduca egli prima alla sua minima spezie, poscia si operi giusta il num. 272.

280. Per conoscere il valore del prodotto nato dalla moltiplicazione di due frazioni, devesi osservare di non paragonare questo prodotto col valore dell'intero semplicemente considerato, del quale intero le due frazioni sono parti, ma hassi a paragonare col valore dell'intero moltiplicato in se stesso; e la ragione si è, per-

perchè il prodotto nato dalla moltiplicazione si può paragonare solamente con un numero della medesima spezie, cioè col prodotto di un'altra moltiplicazione: Per esempio dovendosi conoscere il valore di questo prodotto $\frac{1}{8}$ nato dai due fattori $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, che sono frazioni di piedi, e però l'intero, cui si riferiscono è 12, non si deve paragonare il prodotto $\frac{1}{8}$ con 12, ma con 144, che è il prodotto di 12 in 12, nel qual caso il valore del detto prodotto $\frac{1}{8}$ (giusta il num. 249.) trovasi essere 18, che è l'ottava parte di 144. Di fatto $\frac{3}{4}$ di 12 è 9, e $\frac{1}{6}$ di 12 è 2, ed il prodotto di 9 in 2 è 18. Quindi s'intende quale debba essere il valore del prodotto di tre, di quattro frazioni ec.

281. Costa pertanto dall' operazione, che il moltiplicare per $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ec. non si deve dire veramente moltiplicare, ma dividere, poichè siccome moltiplicandosi per 2, 3, 4 ec. si cerca il duplo, il triplo, il quadruplo ec. della quantità moltiplicanda, così moltiplicandosi per $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ec. se ne cerca la metà, il terzo, il quarto ec., o sia di fatto ella si divide per 2, per 3, per 4 ec.

282. Corol. 1. Quindi moltiplicandosi una delle frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ec. per un numero intero, che sia eguale al denominatore, il prodotto sarà l' unità: come $3 \times \frac{1}{3} = 1$.

283. Moltiplicandosi poi per $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$ ec. parte si moltiplica, e parte si divide; si moltiplica coi numeratori, e si divide coi denominatori.

284. Corol. 2. Per lo che il dividere una quantità intera per un'altra egli è lo stesso, che moltiplicare il dividendo pel divisore ridotto a frazione, il di cui numeratore sia l' unità: così dovendosi dividere 36 per 4 si farà $36 \times \frac{1}{4}$.

285. Corol. 3. S'intende in oltre, che il prodotto di due frazioni proprie deve essere minore di qualsivoglia delle date frazioni, poichè allora dicesi, che una frazione moltiplica un'altra, quando se ne trova una terza (pel num. 102.), la quale contenga tante volte la frazione moltiplicanda, quante volte la frazione moltiplicante contiene l'unità; ma le frazioni (per Ipotesi) essendo proprie, l' unità è maggiore della frazione moltiplicante; dunque ancora la frazione moltiplicanda deve essere maggiore del prodotto. Lo che pure si dica della frazione moltiplicante. Che se poi una delle frazioni moltiplicanti sarà maggiore dell' unità, in tal caso il prodotto sarà minore della frazione moltiplicante, che è maggiore dell' unità, ma maggiore dell'altra frazione.

AR-

ARTICOLO IV.

Modo di dividere le Frazioni, e gl' Interi con Frazioni.

286. PRob. 1. Date due frazioni se ne debba dividere una per l'altra.

287. Risol. Si moltiplichi il numeratore della frazione dividenda pel denominatore della frazione, che serve di divisore, ed il prodotto sarà il nuovo numeratore, cui devesi dare per denominatore il prodotto del numeratore del divisore fratto moltiplicato nel denominatore della frazione dividenda.

288. Dim. Col dividersi una frazione per un'altra non altro vuolsi, che ritrovare un quoziente, il quale indichi quante volte la parte denominata dalla frazione, che serve di divisore, si contenga nella parte denominata dalla frazione dividenda; ma la parte denominata dal divisore fratto risulta dall' intera frazione; dunque siccome col moltiplicarsi per qualche quantità il numeratore di una frazione, ella si accresce, e con moltiplicarsene il denominatore si diminuisce, però a fine di avere il quoziente cercato devesi moltiplicare il numeratore della frazione dividenda pel denominatore della frazione, che serve di divisore, ed al prodotto, come nuovo numeratore, devesi dare per denominatore il prodotto del numeratore del divisore fratto nel denominatore della frazione dividenda. Lo che &c.

289. Dovendosi dividere una frazione per una quantità intera, o *vice versa* si esprima la quantità intera a modo di frazione con sottoscriverci l'unità (giusta il num. 229.), indi si faccia la divisione giusta il num. 287.

290. Che se si dovrà dividere una quantità intera con frazione per una frazione, o *vice versa*; o pure una quantità intera con frazione per una quantità intera con frazione, si riducano prima le quantità intere con frazione a frazione della stessa denominazione della loro frazione annessa (pel num. 240.), poscia si faccia la divisione giusta il num. 287.

291. Se con una quantità intera si dovrà dividere un numero di più figure accompagnato da una frazione, con la quantità intera si faccia prima la divisione del numero intero, indi della frazione (pel num. 289.). Che se dalla divisione del numero intero avanzasse qualche cosa, questo avanzo si riduca a frazione della stessa denominazione della frazione annessa (pel num. 240.), indi si sommino queste due frazioni, e tale somma si divida per la quantità intera giusta il numero 289.

292. Quando una frazione fosse di una spezie, e l'altra frazione di un'altra, devonsi prima ridurre alla loro minima spezie, e poi fare la divisione giusta il num. 287.

ESEMPIO.

293. Prob. 2. Essendo date le quantità d'acqua, che scaricano in un dato tempo due Fiumi A, B confluenti in uno stesso Alveo comune D, e sia la quantità d'acqua scaricata in un'ora dal fiume A $3752\frac{1}{3}$; quella scaricata da B nello stesso tempo $46523\frac{3}{4}$; la larghezza del nuovo Alveo comune sia piedi 498, e la velocità, che in esso deve avere l'acqua, sia tale, che faccia miglia $5\frac{2}{7}$ in un' ora:

ora: Cercasi l'altezza, che nel nuovo Alveo deve avere l'unione di queste acque.

294. Risol. Si sommino insieme le due quantità d'acqua portate dai due fiumi A, B, e si avrà $50276\frac{1}{12}$, quale somma si divida pel prodotto della larghezza 498 nella velocità $5\frac{2}{7}$, quale prodotto è $\frac{18426}{7}$, e però fatta la divisione ne vengono di quoziente Piedi $19\frac{22063}{221112}$, che danno l'altezza cercata. Ecco il Calcolo.

Quantità d'acqua che portano i due Fiumi in un'ora $3752\frac{1}{3}$

$46523\frac{3}{4}$

Somma $50276\frac{1}{12} = \frac{603313}{12}$

Velocità $5\frac{2}{7} = \frac{37}{7}$

Larghezza	498
Numeratore della velocità	37
	3486
	1494
	18426
Prodotto	7

Divisore	Dividendo	Quoziente
$\frac{18426}{7}$	$\frac{603313}{12}$	$\frac{603313 \times 7}{18426 \times 12} = \frac{4223191}{221112}$

e facendo l'attual divisione

Divisore	Dividendo
221112	4223191
Quoz. cercato	$19\frac{22063}{221112}$
	221112
	2012071
	1990008
Residuo	22063

295.

295. Due cose devonsi osservare: La prima si è che data essendo una frazione, altro è dire voglio di questa frazione la parte denominata dalla tale altra frazione; altro è dire voglio dividerla per la tale altra frazione, o sia voglio sapere la contenenza di questa frazione nella tale altra: Come essendo data la frazione $\frac{1}{2}$, mentre dico voglio dividere $\frac{1}{2}$ per un sesto, questo vuol bensì dire, che si prenda il sesto di una metà, quale è $\frac{1}{12}$, ma non già che si prenda la contenenza di $\frac{1}{6}$ in $\frac{1}{2}$; per lo che si vede, che in questo modo si viene ad escludere la divisione, poichè questa espressione, voglio il sesto di $\frac{1}{2}$, vuol dire, voglio di $\frac{1}{2}$ non più che la sesta parte: Ora questa è l'espressione della moltiplicazione. Ma quando si dice, voglio sapere che parte sia $\frac{1}{6}$ di $\frac{1}{2}$, egli è lo stesso, che dire voglio sapere quante volte un sesto si contenga in una metà, lo che, come ognun vede importa la divisione: onde ne viene $\frac{6}{2} = 3$ quoziente cercato.

296. La seconda si è, che non deve far meraviglia il trovarsi alle volte un intero per quoziente nato dal dividersi una frazione per un'altra, mentre nella divisione si cerca un numero, il quale indichi quante volte il divisore si contiene nel dividendo, ed una frazione può ottimamente contenere due, tre, quattro ec. volte un'altra frazione. Di fatto siccome ha lo stesso rapporto di contenenza il quoziente al dividendo, che l'unità al divisore, egli è chiaro, che se il divisore sarà maggiore dell'unità, il quoziente sarà minore della frazione dividenda; e se il divisore sarà minore dell'unità, il quoziente sarà maggiore del dividendo; e finalmente se il divisore sarà l'unità, il quoziente sarà eguale al dividendo.

ARTICOLO V.

Delle Frazioni di Frazioni, e modo di esprimerle.

297. DEf. La frazione di frazione non è altro, che una parte di una frazione.
298. Siccome dalla divisione degl' interi nascono le frazioni, così dal dividersi le frazioni nascono le frazioni di frazioni, di cui abbiamo incidentemente parlato al num. 245.

299. Se una frazione si dividerà in altre parti, queste si chiameranno frazioni seconde: Che se le frazioni seconde si divideranno in altre parti, queste si chiameranno frazioni terze, e così susseguentemente. Queste frazioni si scrivono così $\frac{1}{4}$ di $\frac{5}{7}$, la quale espressione vuol dire un quarto di cinque settimi. Così $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$ di $\frac{6}{7}$, vuol dire due terzi di quattro quinti di sei settimi.

AR-

ARTICOLO VI.

Modo di ridurre le frazioni seconde, terze ec. a frazioni comuni.

300. PRob. 1. Debbasi ridurre a frazione comune una data frazione di frazione.

301. Risol. Si moltiplichino insieme i numeratori sì della frazione di frazione, come della frazione, di cui essa è parte, ed a questo prodotto come numeratore si dia per denominatore il prodotto de' denominatori, e questa nuova frazione sarà frazione comune, ed eguale alla data frazione di frazione.

302. Dim. La frazione, che si riferisce ad un tutto intero, e che però dicesi frazione comune, non fa altro, che esprimere (pel num. 212.) quante di quelle parti, in cui è stato diviso l' intero, debbansi prendere: Ora nel caso presente il prodotto de' denominatori dinota in quante parti eguali sia stato diviso il tutto, di cui si tratta, ed il prodotto de' numeratori esprime quante di queste parti si sono prese: Dunque questa nuova trovata frazione è frazione comune. Che poi sia eguale alla data frazione di frazione rendesi manifesto coll' osservare, qualmente la frazione di frazione esprime, che delle parti rappresentate dal di lei denominatore, in cui vuolsi divisa la frazione data, se ne devono prendere tante, quante indica il suo numeratore: Ma questo si ottiene mediante la moltiplicazione dei numeratori, e dei denominatori; dunque la frazione nata da questa moltiplicazione è eguale alla proposta frazione di frazione, ed è frazione comune. Lo che ec.

303. Se le frazioni di frazioni saranno due, tre ec., col prodotto di tutti i numeratori, e denominatori si formi una nuova frazione, che sarà frazione comune, ed eguale all' ultima frazione di frazione, o sia alla minima: Poscia omessa questa frazione di frazione si moltiplichino insieme i numeratori, e denominatori delle rimanenti, e coi prodotti se ne formi una nuova frazione, che sarà frazione comune, ed eguale a quella, che viene appresso alla frazione poc' anzi ridotta. Indi collo stesso metodo si riducano le altre.

ESEMPIO.

304. Prob. 2. Trattandosi di gittare un Molo in Mare lungo 389 passi si è data l' opera ad impresa al prezzo di 4500 scudi: Ma l' Impresario dopo averne fatto fare un terzo cedette l' impegno ad un' altro riserbandosi il prezzo corrispondente al lavoro fatto: Questi poi dopo averne fatti fare $\frac{3}{8}$ dell' $\frac{1}{3}$ fatto fare dal primo s' ammalò, e morì, e gli Eredi non furono in grado di seguitare l' opera; però si presentò un' altro, il quale fece fare $\frac{4}{7}$ dei $\frac{3}{8}$, e per un' accidente occorso non potè più seguitare: Cercasi quanto di questo Molo sia stato fatto fare da questi tre, e quanto debbasi a ciascun di loro per la corrispondente opera.

305. Risol. Primieramente si riducano a frazioni comuni le due frazioni di frazioni $\frac{4}{7}$ di $\frac{3}{8}$ di ec. con moltiplicare i numeratori delle tre frazioni $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{3}$, de' quali il prodotto è 12, cui dandosi per denominatore il prodotto 168 dei tre de-

denominatori, si avrà $\frac{12}{168}$ frazione comune, ed eguale alla frazione $\frac{4}{7}$. Poscia moltiplicando i numeratori delle due frazioni $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{3}$, ed al prodotto 3 dandosi per denominatore il prodotto 24 de' due denominatori, si avrà $\frac{3}{24}$ frazione comune, ed eguale alla frazione $\frac{3}{8}$: Per lo che le date frazioni ridotte a frazioni comuni saranno $\frac{12}{168}$, $\frac{3}{24}$, $\frac{1}{3}$. Ora si sommino queste tre frazioni giusta il num. 263, e si avrà $\frac{6408}{12096}$ = (pel num. 228.) $\frac{89}{168}$, con dividere cioè il numeratore, e il denominatore della frazione $\frac{6408}{12096}$ per 72, e questa frazione $\frac{89}{168}$ ci dà la quantità del Molo già fatta. Che se si sottrerà questa frazione dall' unità, che si prende per la lunghezza di tutto il Molo, ridotta a frazione (pel num. 237.), il di cui denominatore sia 168, vale a dire da $\frac{168}{168}$, si avrà $\frac{79}{168}$, che è la rimanente quantità del Molo da farsi. Resta ora da determinarsi il prezzo, che deve toccare a ciascuno in ragione del lavoro fatto: Se pertanto si moltiplicherà il numeratore di $\frac{1}{3}$ per 4500 prezzo stabilito per il getto del Molo, ed il prodotto si divida pel denominatore 3, si avranno 1500 scudi, prezzo che deve toccare al primo Impresario, che ne fece fare $\frac{1}{3}$. Per determinare il prezzo, che devesi a quello, che ne fece fare $\frac{3}{8}$ di $\frac{1}{3}$, perchè questo $\frac{3}{8}$ ridotto a frazione comune è = $\frac{3}{24}$, si moltiplichi il numeratore di questa frazione per 4500, ed il prodotto si divida pel denominatore 24, onde si avranno scudi 562 $\frac{1}{2}$ prezzo dovuto al secondo. Finalmente per sapere il prezzo, che devesi all' ultimo, il quale ne fece fare $\frac{4}{7}$ di $\frac{3}{8}$, perchè questo $\frac{4}{7}$ ridotto a frazione comune è $\frac{12}{168}$, si moltiplichi il numeratore 12 di questa frazione per 4500, ed il prodotto diviso pel denominatore 168 lascierà di quoziente scudi 321 $\frac{3}{7}$ prezzo dovuto all' ultimo. Ecco il Calcolo.

Frazioni date

$\frac{4}{7} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{12}{168}$ frazione comune eguale alla frazione $\frac{4}{7}$

$\frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{24}$ frazione comune eguale alla frazione $\frac{3}{8}$.

Riduzione di queste tre frazioni $\frac{12}{168}$, $\frac{3}{24}$, $\frac{1}{3}$ allo stesso denominatore.

$\frac{12}{168} \times 24 = \frac{288}{4032}$ $\quad \frac{288}{4032} \times 3 = \frac{864}{12096}$

$\frac{3}{24} \times 168 = \frac{504}{4032}$ $\quad \frac{504}{4032} \times 3 = \frac{1512}{12096}$

$\frac{1}{3} \times 4032 = \frac{4032}{12096}$

Som-

Somma delle tre ridotte frazioni $\frac{864}{12096}$, $\frac{1512}{12096}$, $\frac{4032}{12096}$

$$\begin{array}{r} 864 \\ 1512 \\ 4032 \\ \hline 6408 \end{array}$$

$$\text{Somma.}\ \frac{6408}{12096} = \frac{89}{168}\ \text{lavoro fatto.}$$

Quindi $\frac{168}{168} - \frac{89}{168} = \frac{79}{168}$ lavoro da farsi.

$\frac{1}{3} \times 4500 = \frac{4500}{3} = 1500$ prezzo dovuto al primo Impresario

$\frac{3}{24} \times 4500 = \frac{13500}{24} = 562\ \frac{1}{2}$ prezzo dovuto al secondo

$\frac{12}{168} \times 4500 = \frac{54000}{168} = 321\ \frac{3}{7}$ prezzo dovuto al terzo.

ARTICOLO VII.

Modo di calcolare le frazioni di frazioni.

306. PRob. Si debbano ridurre allo stesso denominatore, Sommare, Sottrarre, Moltiplicare, e Dividere frazioni di frazioni tra loro, o pure con interi, o con altre frazioni comuni.

307. Risol. Si riducano le date frazioni di frazioni a frazioni comuni (giusta il num. 300.), indi si operi come nelle frazioni comuni nella maniera già esposta.

ARTICOLO VIII.

Dell' origine delle frazioni decimali, e del modo di esprimerle.

308. DEf. Le frazioni decimali non sono altro, che le parti decime di una quantità, o numero, che si prende per l' unità, ognuna delle quali si può dividere in altre decime, le quali sono centesime del tutto, e ognuna di queste in altre decime, che saranno millesime del tutto ec.

309. Corol. Le frazioni adunque decimali sono quelle, i denominatori delle quali crescono in valore decuplo, cominciando dal 10, così 10; 100; 1000; 10000 ec.

310. Queste frazioni si esprimono così $\frac{4}{10}$; $\frac{7}{100}$; $\frac{16}{1000}$ ec.

H 2 311.

311. Corol. 1. Acciò adunque una data frazione decimale sia una frazione propriamente tale, fa di mestieri, che il denominatore superi d' una figura il numeratore; e però se vi saranno egualmente tante figure nel numeratore, che nel denominatore, la prima figura del numeratore valerà un' intero, e l'altre figure esprimeranno la frazione. Lo stesso a proporzione s' intenda se nel numeratore vi saranno più figure, che nel denominatore. Essendo pertanto data la frazione $\frac{35345782}{1000000}$, essa sarà lo stesso, che $35\ \frac{345782}{1000000}$, o sia sarà eguale alle seguenti quantità $35 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{8}{100000} + \frac{2}{1000000}$; dal che chiaramente s' intende, che nelle frazioni decimali propriamente tali la prima figura a sinistra del numeratore dinota le parti decime; la seconda esprime le parti centesime; la terza indica le parti millesime ec.

312. Corol. 2. Quindi codeste frazioni decrescono continuamente in valore decuplo.

313. Poichè i denominatori di queste frazioni costano dell' unità accompagnata con zeri, quindi è, che si possono ottimamente indicare questi denominatori per mezzo di apici esprimenti il conveniente numero de' zeri, e in questo modo scrivere le frazioni decimali a modo d' interi, scrivendo cioè i soli numeratori, indi notando sopra l' ultima loro figura il conveniente apice, che mostri il numero de' zeri, che deve ricevere il denominatore: Nel qual modo la frazione $\frac{35345782}{1000000}$ si scriverà così 35345782^{VI}.

314. Alcuni usano di omettere gli apici separando con una linea gli interi dalla frazione così 35 | 345782, nel qual caso il numero delle figure dopo la linea esprime il numero de' zeri, che deve avere il denominatore. Comunemente però si costuma di prefiggere un punto al numeratore, separando in questo modo gl' interi dai decimali così 35 . 345782.

315. Quando non precede i decimali alcun' intero, allora in luogo degl' interi si nota un zero, il quale indica, che il valore degl' interi è nullo, o sia non vi sono interi: E però dovendosi scrivere otto decimi, si farà o. 8; e o. 25 per scrivere venticinque centesimi.

316. L'ordine de' decimali dicesi interrotto quando ve ne mancano alcuni d'ordine primo, o pure intermedio: Come se mancassero le parti decime essendovi le centesime; o vero se mancassero le parti centesime essendovi le decime, e le millesime, nel qual caso devonsi riempiere con zeri i luoghi vacui: Così avendosi tre decimi, più sette millesimi, più quattrocento millesimi, si scriverà o. 30704. Che poi ciò non alteri il valore della frazione or ora lo dimostro, premesso che abbia il seguente problema.

317. Prob. 1. Si debba ridurre una data frazione decimale ad un' altra eguale, e di un proposto denominatore; o più frazioni decimali al comune denominatore.

318. Risol. Si osservi di quanti zeri il denominatore della frazione cercata superi il denominatore della frazione data, e questo eccesso di zeri si aggiunga al numeratore, e al denominatore della frazione data, con che si avrà una nuova frazione eguale alla proposta, e che avrà il cercato denominatore: Come volendosi ridurre a millesimi la frazione o. 9, perchè il 1000 supera il 10 di due zeri, si aggiungano due zeri tanto al numeratore, come al denominatore della data frazione

ne $\frac{9}{10}$, e si avrà $\frac{900}{1000}$; o sia o. 900 frazione eguale alla proposta $\frac{9}{10}$, e che ha per denominatore il 1000.

319. Dim. Pel num. 227. non si altera il valore di una frazione con moltiplicare tanto il numeratore, come il denominatore per una stessa quantità: Ma ciò è appunto lo che si fa nel presente caso, mentre l' aggiungere ad una quantità alcuni zeri non è altro, che moltiplicarla per l' unità accompagnata da tanti zeri quanti sono stati gli aggiunti: Dunque perchè coll' aggiungervi quel tal numero di zeri se gli viene a dare il denominatore cercato, la frazione trovata è eguale alla data, ed ha il denominatore, che si voleva. Lo che si doveva dimostrare.

320. Ora dimostro, che col riempiere di zeri i luoghi vacui di una frazione mancante dei decimali intermedj non si viene ad alterare il valore della frazione, mentre con ciò non si fa altro, che ridurre le frazioni proposte al comune denominatore: Onde giusta il Caso dato riducendosi le tre frazioni $\frac{3}{10} + \frac{7}{1000} + \frac{4}{100000}$ al comune denominatore 100000, si avrà $\frac{30000}{100000} + \frac{700}{100000} + \frac{4}{100000}$, e facendo la somma dei numeratori così

Numeratori	30000
	700
	4
Somma	30704

si avrà $\frac{30704}{100000}$, o sia o. 30704.

321. Non solo poi si sogliono riempiere di zeri i luoghi vacui intermedj, ma eziandio, come ho detto al num. 316, i luoghi vacui nel principio per indicare gli ordini mancanti, e dinotare che ordine di parti rappresentino le figure significative: Onde dovendosi scrivere sette millesimi si farà o. 007.

322. Def. 2. Le parti decime si chiamano decimali primi; le parti centesime, decimali secondi ec.

323. Def. 3. Le figure delle frazioni decimali si dicono essere dello stesso ordine quando i loro denominatori sono gli stessi.

324. La facilità, con cui si calcolano queste frazioni, le ha dato un' uso quasi perpetuo nelle Matematiche. Il primo, che le ha adoperare è stato il Regiomontano nella costruzione delle Tavole de' Seni. Da Giovanni Nepero poi furono applicate al calcolo de' Logaritmi. Con esse si facilita il calcolo delle altre frazioni, e si accosta al vero valore delle quantità ineffabili.

325. Prob. 2. Si debba ridurre una quantità intera a frazione decimale di un tale cercato denominatore.

326. Risol. Si esprima l' intero a modo di frazione comune sottoscrivendoci l' unità (pel num. 229.), indi si aggiungano al numeratore, e al denominatore di questa frazione tanti zeri, quanti ne deve avere il cercato denominatore: O pure volendosi esprimere il cercato decimale a modo d' intero, si aggiungano alla data quantità intera tanti zeri separati al solito con un punto, quanti ne deve avere il denominatore.

327.

327. Dim. La data quantità intera si moltiplica in tal caso, e si divide per la stessa quantità; dunque la frazione trovata è eguale al proposto intero. Lo che si doveva ec.

328. Così dovendosi ridurre il 23 a decimali terzi, si farà 23 . 000

329. Prob. 3. Si debba ridurre una data frazione comune a frazione decimale.

330. Risol. Al numeratore della data frazione si aggiungano tanti zeri, quanti vengono indicati dall'ordine della frazione decimale, a cui si vuole ridurre la frazione proposta; dopo di che si divida il numero risultato pel denominatore della frazione data, ed il quoziente sarà il numeratore della cercata frazione decimale.

331. La dimostr. è chiara, perchè ciò non è altro, che ridurre la data frazione ad un'altra di un proposto denominatore.

332. Come volendosi ridurre a decimali secondi la frazione $\frac{2}{5}$, si aggiungano due zeri al numeratore 2, onde si avrà 200, che diviso pel denominatore 5 lascia di quoziente 40: onde la cercata frazione decimale eguale a $\frac{2}{5}$ sarà 0. 40

333. Che se dopo essersi aggiunti al numeratore della data frazione comune, che si vuol ridurre ad una frazione decimale comunque, uno, due, tre ec. zeri, non si potrà col denominatore farne esattamente la divisione, lo che accade nei moltiplici de'numeri primi, in tal caso dopo essersi aggiunti al numeratore quattro, o sei zeri, si trascuri finalmente l'ultimo residuo, come già ridotto a minuzia insensibile: come per ridurre a frazione decimale la frazione comune $\frac{3}{7}$, aggiungo primieramente al numeratore 3 un zero, onde ho 30, che diviso pel denominatore 7 da di quoziente 4, ed avanza 2, a cui aggiungo un zero, e divido il risultato 20 per 7, con che trovo di quoziente 2, e di residuo 6, a cui aggiungo pure un zero, poscia divido per 7 il provenuto 60, e mi viene di quoziente 8, ed avanza 4, cui scrivo appresso un zero, indi divido per 7 il risultatomi 40, e ne trovo di quoziente 5, e di residuo parimente 5, al quale per ultimo aggiungo un zero, e viennmi 50, che divido per 7, onde ho di quoziente 7, e di residuo 1, quale più non curo; per lo che ho finalmente ridotto il $\frac{3}{7}$ a 0. 42857, quale frazione decimale è bensì minore di $\frac{3}{7}$, ma essendo il difetto minore di $\frac{1}{100000}$, l'errore è così piccolo, che si può francamente trascurare.

334. Quando la divisione pel denominatore si fa perfettamente, la ritrovata frazione decimale dicesi esatta, ed ella esprime la vera ragione della parte indicata al suo tutto; se poi la divisione pel denominatore non si fa perfettamente, ma in modo però, che il difetto, o l'eccesso sia infinitamente piccolo, in tal caso la ritrovata frazione decimale esprimerà la quasi vera ragione della parte al tutto, e però chiamerassi frazione approssimante, in quanto che infinitamente si accosta al vero valore.

335. Prob. 4. Debbasi ridurre una data frazione decimale a frazione comune.

336. Risol. Si divida il numeratore, e il denominatore della data frazione decimale pel massimo comun divisore, e i due quozienti daranno il numeratore, e il denominatore della cercata frazione comune.

337. La Dim. costa dal num. 228, in quanto che la frazione trovata è eguale alla proposta; che poi sia frazione comune è chiaro, perchè il denominatore della fra-

frazione trovata risultando dal dividersi il denominatore decimale per una quantità non decimale, non può essere denominatore decimale.

338. Se poi non si potrà avere una tale misura, la quale divida esattamente, ma divida solo prossimamente il numeratore, e il denominatore della frazione data, si potrà non ostante prendere con essa la frazione comune, la quale quantunque non accuratamente, pure prossimamente uguaglierà la proposta frazione decimale: così si può prendere la frazione o. $3333 = \frac{1}{3}$, quantunque sia $\frac{1}{3} = \frac{3333}{9999}$ e o. $3333 = \frac{3333}{10000}$, ma perchè la differenza è così piccola, ella si può senza scrupolo trascurare.

339. Per determinare di una data frazione decimale il valore, che gli corrisponde in unità delle spezie inferiori competenti all'intero, cui tale frazione si riferisce, si regoli giusta il num. 249. Che se una proposta frazione decimale avrà nel numeratore de' zeri a destra, ella si ridurrà a decimali d'ordine inferiore con levarci i zeri: così la frazione o. 4000 si ridurrà a o. 4

ARTICOLO IX.

Modo di Sommare le Frazioni decimali.

340. PRob. I. Debbansi sommare insieme alcune frazioni decimali.

341. Risol. Se le date frazioni decimali hanno luoghi vacui, si riempiano giusta il num. 316: indi si riducano, se non lo sono, tutte allo stesso ordine; poscia collocando ciascuna spezie de' decimali sotto alla sua corrispondente, se ne faccia la somma giusta il num. 71, nella quale si separino con un punto tante figure a destra, quante ne richiede l'ordine de' decimali sommati.

342. Poichè queste frazioni procedono in valore decuplo, la dimostrazione di questa operazione è la stessa di quella data al num. 73, mentre quì altro non trattasi, che fare la somma de' numeratori, essendo i denominatori eguali, o piuttosto si ripeta la dim. del num. 265.

ESEMPIO.

343. Prob. 2. Cercasi lo spazio, che nel voto percorrerà un grave discendendo in 4 minuti secondi, mentre giusta l'Eulero in un secondo percorre piedi del Reno 15. 625

344. Risol. Perchè il detto grave giusta le leggi del Galileo percorre nel secondo minuto il triplo dello spazio percorso nel primo; nel terzo ne percorre il quintuplo; nel quarto il settuplo; però percorrendo nel primo minuto piedi 15. 625, nel secondo ne percorrerà 46. 875; nel terzo 78. 125; e nel quarto 109. 375: quindi sommando questi quattro spazii, si avranno piedi 250 percorsi ne' detti quattro minuti secondi, nella quale somma svaniscono le frazioni, mentre il loro numeratore si trova essere ooo. Ecco il Calcolo.

Spa-

Spazio percorſo nel primo minuto ſecondo	1 5. 6 2 5
Nel ſecondo minuto	4 6. 8 7 5
Nel terzo minuto	7 8. 1 2 5
Nel quarto minuto	1 0 9. 3 7 5
Somma	2 5 0. 0 0 0

e però in quattro minuti ſecondi lo ſpazio percorſo dal detto corpo diſcendente è di piedi 250.

ARTICOLO X.

Modo di fare la ſottrazione nelle frazioni decimali.

345. PRob. 1. Debbaſi ſottrarre una frazione decimale da un'altra.

346. Riſol. Si collochi ciaſcun' ordine de' decimali ſotto il ſuo corriſpondente, e ſi riempiano con zeri i luoghi vacui qualora lo richiede il biſogno; di più ſe le due date frazioni non ſono dello ſteſſo ordine, vi ſi riducano; Indi ſi faccia la ſottrazione giuſta il num. 89, e finalmente ſi ſeparino con un punto tante figure a deſtra, quante ne richiede l'ordine de'decimali propoſti. La dimoſtrazione è la ſteſſa di quella data al num. 94; o ſia perchè ſono frazioni, che hanno lo ſteſſo denominatore; è la medeſima del num. 265.

347. Se da un' intero ſi dovranno ſottrarre alcuni decimali, ſi riduca l' intero a decimale dello ſteſſo ordine della frazione da ſottrarſi (pel num. 326.), indi ſi operi come ſi è detto.

ESEMPIO.

248. Prob. 2. Siano due corpi eguali non elaſtici A, B, i quali ſi vengano incontro con ineguali quantità di moto, e la velocità del primo ſia 23. 14; la velocità del ſecondo ſia 16. 354. Cercanſi le velocità, che avranno queſti due corpi dopo l'incontro.

349. Riſol. Si ſottri la velocità del ſecondo dalla velocità del primo, e la metà del reſiduo darà la velocità cercata, che compete a ciaſcuno de'corpi A, B. Ecco il Calcolo.

Velocità del corpo A	2 3. 1 4 0
Velocità del corpo B	1 6. 3 5 4
Reſiduo	6. 7 8 6, la di cui metà è 3. 393

e però la velocità, che dopo l'incontro avrà ciaſcuno de'detti corpi, ſarà 3. 393. Per ſottrarſi la frazione 354 dall'altra 14 ſi è dovuto ridurre queſta allo ſteſſo ordine facendo 140.

AR-

ARTICOLO XI.

Modo di Moltiplicare le frazioni decimali.

350. PRob. 1. Si debbano moltiplicare insieme due date frazioni decimali.
351. Risol. Se le date frazioni hanno luoghi vacui, essi si riempiano giusta il num. 316; indi si moltiplichino insieme giusta il num. 122; finalmente con un punto si separino nel prodotto a destra tante figure, quante erano le separate tanto nel moltiplicante, come nel moltiplicando.

352. Dim. Poichè le frazioni decimali procedono con valore decuplo, la dimostrazione è la stessa di quella data al num. 118. Che poi nel prodotto si debbano separare con un punto a destra tante figure, quante sono le separate nei due fattori, renderassi manifesto coll'osservare, che il numero di queste figure dinota (pel num. 314.) il numero de' zeri, che deve avere il denominatore; ma il prodotto di due frazioni nasce (pel num. 272.) dal moltiplicarsi tra loro i numeratori, indi i denominatori; e nelle frazioni decimali il prodotto de' denominatori (pel num. 119.) è l' unità accompagnata da tanti zeri, quanti erano ne' due denominatori, o sia quanti venivano indicati dalle figure separate col punto ne' due fattori; dunque nel prodotto si devono separare con un punto tante figure a destra ec. Lo che si doveva dimostrare.

353. Se l' uno, e l'altro fattore sarà una frazione approssimantesi al vero valore, si moltiplichino insieme questi due fattori, prendendo prima in ciascun di loro l'ultima figura a destra maggiore del giusto; indi si tornino a moltiplicare prendendo in ciascun di loro la suddetta ultima figura a destra minore del giusto, poscia si osservino i due prodotti, e quelle figure, che saranno le stesse in tutti due, saranno le certe, le altre poi saranno incerte. Che se una sola sarà la frazione approssimantesi al vero valore, si moltiplichi essa primieramente con l' altra prendendo la sua ultima figura a destra maggiore del giusto, di poi si torni a moltiplicare prendendo la detta ultima figura minore del giusto; e quelle figure, che saranno le stesse nei due prodotti saranno le certe.

354. Quando una frazione decimale è minore del giusto, come la proposta al num. 333., ella si suole scrivere così 0. 42857 —. Ma se è maggiore del giusto, come la 0. 89 $= \frac{7}{9}$, ella si scrive così 0. 89 +

ESEMPIO.

355. Prob. 2. Dovendosi coprire un tetto largo piedi di Parigi 43. 3, e lungo 57. 29. con lastre di piombo grosse 0. 2 di pollice: cercasi il peso di tutto il piombo, che dovrassi impiegare.

356. Risol. Si trovi l' area del tetto, che è $\overline{43.3 \times 57.29} = 2480.657$; di poi si osservi, che un piede piano, il quale contiene 144 pollici piani, non ha che 0. 2 di pollice di grossezza, e però per ridurlo in una massa solida, devesi dividere 144 per 10; ed il quoziente 14. 4 devesi moltiplicare per 2, perchè la grossezza delle lastre è 0. 2, onde si avranno 28. 8 pollici solidi per ogni piede piano di dette lastre. Ma poichè un pollice solido di piombo pesa oncie 8. 7853,

se si moltiplicherà questo numero per 28 . 8, si avranno oncie 253. 01664 esprimenti il peso di un piede piano di piombo. Che però se si moltiplicheranno per ultimo queste oncie 253. 01664 per 2480. 657 area di tutto il tetto, si avranno finalmente oncie 627647. 49913248, che ridotte in libbre, e pesi sono pesi 2092, libbre 3, oncie 11. 49913248, che è il peso cercato di tutto il piombo necessario per coprire il tetto proposto. Ecco il Calcolo.

```
              Larghezza   43. 3
              Lunghezza   57. 29
                         --------
                          3897.
                           866
Prodotto                 3031
                        2165
                       ----------
             Area .     2480.657
```

Pollici di un piede piano

```
10 | 144
   |-----
```

Quoz. 14. 4 che moltiplicato per 2 è 28. 8 numero, che esprime i pollici solidi, che comprende ogni piede piano delle date lastre.

```
Peso di ogni pollice solido    8. 7853
              Pollici solidi  28. 8
                             ---------
                               702824
                              702824
                             175706
                             ---------
                             253.01664
```

Prodotto che esprime il numero delle oncie, che compete a pollici solidi 28. 8, o sia un piede piano delle date lastre.

```
Oncie che competono a un piede piano delle date Lastre   253. 01664
                                              Area     2480. 657
                                                      -----------
                                                         177111648
                                                        126508320
                                                       151809984
                                                     202413312
                                                    101206656
                                                   50603328
                                                  ---------------
                                                  627647.49913248
```

Prodotto, che dà il numero delle oncie necessarie per coprire il proposto tetto. On-

Oncie trovate

12 | 627647.49913248

Quoz. di lib. 52303:11.49913248

Libbre trovate

25 | 52303:11.49913248

Quoz. di pesi 2092:3:11.49913248

e però per coprire il proposto tetto sono necessarii Pesi di piombo 2092:3:11.49913248.

ARTICOLO XII.

Modo di dividere le Frazioni decimali.

357. PRob. 1. Si debba dividere una data frazione decimale per un' altra.
358. Risol. Se vi sono de' luoghi vacui si riempiano co' zeri (pel num. 316.) indi si faccia la divisione giusta il num. 139. Finalmente nel quoziente si separino con un punto a destra tante figure, quante ne esprime il numero delle figure decimali del dividendo diminuite del numero delle figure decimali del divisore.

359. La Dim. è la stessa di quella data al num. 147. Che poi il numero delle figure decimali nel quoziente debba essere la differenza del numero delle figure decimali del dividendo, e del divisore, lo dimostro. Poichè queste sono vere frazioni, la loro divisione non è differente da quella spiegata al num. 287; dunque il denominatore del divisore dovendo moltiplicare il numeratore del dividendo, e il numeratore del divisore il denominatore del dividendo, onde si abbia il quoziente cercato, egli è chiaro, che il numeratore, e denominatore di questo quoziente potrassi ridurre a minimi termini con dividere l'uno, e l'altro per l'unità accompagnata da tanti zeri, quanti sono quelli, che erano nel divisore; quindi il quoziente sarà una frazione decimale, il di cui denominatore avrà solamente tanti zeri, quanti ne ha la differenza del numero de' zeri ne' denominatori del dividendo, e del divisore; conseguentemente nel quoziente si dovranno separare con un punto tante figure a destra, quante ne esprime il numero delle figure decimali del dividendo diminuito del numero delle figure decimali del divisore. Lo che si doveva dimostrare.

360. Se il numero delle figure decimali sarà maggiore nel divisore, che nel dividendo, in tal caso si aggiungano a destra del dividendo tanti zeri (lo che non altera il valore della frazione pel num. 319.), quanti si richieggono, acciò si possa fare la divisione.

361. Qualora fatta la divisione avanza qualche cosa, con tale avanzo si formerà una frazione, che dovrà avere per denominatore il denominatore del dividendo.

362. Una cosa da osservarsi quì pure nella divisione delle frazioni decimali, che si approssimano al vero valore, si è il saper distinguere le ultime figure certe dalle incerte, lo che si ottiene così: si faccia prima la divisione con prendere l'ultima figura a destra del dividendo maggiore del giusto, e l'ultima figura a destra del divisore minore del giusto; indi si torni a fare la stessa divisione prendendo l'ultima figura a destra del dividendo minore del giusto, e l'ultima figura a destra del divisore maggiore del giusto: si osservino poscia i due quozienti, che da queste divisioni sono nati, e quelle figure, che saranno le stesse nell'uno, e nell'altro, saranno le certe, le altre saranno incerte.

ESEMPIO.

363. Prob. 2. Dati due pesi A, B, il primo di libbre 85. 379, il secondo di libbre 28. 653 attaccati ad una corda, che passa sopra una girella; cercasi la pressione, che ne soffre l'asse di questa girella.

364. Risol. Si prenda il quadruplo del prodotto di questi due pesi, quale si divida per la somma degli stessi pesi, ed il quoziente darà la pressione cercata. Ecco il Calcolo.

Peso di A 85. 379
Peso di B 28. 653

256137
426895
512274
683032
170758

Prodotto 2.446.364487

Prodotto de' Pesi

2446.364487
4

9785.457948 Quadruplo del prodotto de' pesi.

Pesi { 85. 379
28. 653 }

Somma de' pesi 114. 032

Som-

```
Somma de' pesi | Quadruplo del prodotto de' pesi
   114. 032    |  9785.457948
                  ------------
Quoz. che dà la pressione cercata   85. 812 143964/1000000
                  912256
                  ------
                   662897
                   570160
                   ------
                    927379
                    912256
                    ------
                     151234
                     114032
                     ------
                      372028
                      228064
                      ------
Residuo               143964
```

la cercata pressione pertanto viene espressa dal ritrovato quoziente $85.812\frac{143964}{1000000}$ $= 85.955964$.

ARTICOLO XIII.

Delle frazioni sessagesime, e modo di esprimerle.

365. DEf. 1. Le frazioni sessagesime non sono altro, che espressioni di alcune parti di un tutto, delle quali egli n'è diviso in sessanta, come sarebbe $\frac{8}{60}$; $\frac{35}{60}$ ec. Ognuna poi di queste parti sessagesime si può dividere in altre sessagesime; e queste in altre, nel qual modo i loro denominatori anderanno sempre crescendo col rapporto di 60 a 60 così $\frac{1}{60}$; $\frac{1}{3600}$; $\frac{1}{216000}$; $\frac{1}{12960000}$ ec.

366. Def. 2. Le parti sessagesime del tutto si chiamano minuti primi, come $\frac{7}{60}$; $\frac{49}{60}$; le parti sessagesime di un minuto primo si chiamano minuti secondi, come $\frac{11}{3600}$; le parti sessagesime di un minuto secondo diconsi minuti terzi, come $\frac{13}{216000}$ ec.

367. Per scrivere più compendiosamente queste frazioni si usa di scrivere i sol. numeratori, distinguendo l'ordine de' loro denominatori per mezzo di un conveniente apice: Onde per scrivere venticinque minuti si farà $25'$; per scrivere cinquan-

quantasette secondi si farà 57″; per scrivere otto terzi si farà 8‴ ec. L'apice poi degl' interi è zero, così 9°; 42° ec. La dottrina delle presenti frazioni serve per calcolare il tempo, mentre l'ora si divide in 60 minuti primi; ogni primo in 60 secondi; ogni secondo in 60 terzi ec. Serve in oltre per calcolare i moti, e i veri luoghi de' Corpi Celesti, i quali aggirandosi con continuo moto attorno un punto, che è il centro delle loro rivoluzioni, o sia Orbite, con determinarsi le parti percorse di queste Orbite, viensi a determinare la quantità del loro moto. Ora per potere determinare queste parti percorse fu di mestieri il dividere tali Orbite in un certo numero di parti, mediante le quali si potesse richiamare al calcolo, e conseguentemente determinare il fatto viaggio, come quello, che a loro è relativo. Le parti poi, in cui è piacciuto dividerle sono 360, che diconsi gradi, ognuno de' quali si divide in 60 minuti primi; ed ogni primo in 60 secondi ec. Trenta di questi gradi fanno un segno, che è la duodecima parte di tutta l'Orbita.

ARTICOLO XIV.

Modo di Sommare, e Sottrarre le frazioni sessagesime.

368. PRob. 1. Date essendo alcune frazioni sessagesime si debbano sommare insieme; o pure sottrarne una dall' altra.

369. Risol. Si collochi primieramente ciascun' ordine sotto il suo corrispondente; e fatto ciò, quanto alla Somma, si comincino a sommare le figure del primo ordine posto a destra, e se tale somma non arriva a 60, si scriva sotto; se è 60, sotto si scriva zero, e si porti una unità alle figure del seguente ordine; se poi è più di 60, si portino tante unità alle figure del seguente ordine, quante volte in tale somma entra il 60, e il di più si scriva sotto; e questo metodo si osservi nella somma di tutti gli altri ordini, finchè si arriva ai gradi, de' quali se la somma è meno di 30, si scrive sotto; se è 30, sotto si nota zero, indi si porta una unità alle figure de' segni; se è più di 30, si portano tante unità alle figure de' segni, quante volte in tale somma entra il 30, e il di più si scrive sotto. Finalmente si prende la somma de' segni, la quale devesi scrivere sotto, se non arriva a 12; se è 12, sotto si nota zero; se è più di 12, sotto si scrive il di più solamente, perchè al proposito non servono se non i segni, i quali non danno un' Orbita intera. Quanto alla Sottrazione collocate le figure di ciascun' ordine sotto alle figure dell' ordine corrispondente, si comincino a sottrarre le figure inferiori del primo ordine a destra dalle superiori, ed il residuo si scriva sotto; e questo metodo si osservi rispetto agli altri ordini. Se poi le figure inferiori di qualche ordine fossero maggiori delle corrispondenti superiori, onde non si potesse fare la sottrazione, in tal caso si doni 60 alle figure superiori, e questo 60 sarà una unità presa dalle figure del seguente ordine a sinistra. Solamente quando ne' gradi non si può sottrarre il numero inferiore dal superiore per essere questi minore, al detto numero superiore si deve donare 30, perchè una unità de' segni, che in tal caso da loro si prende, vale 30. gradi. Quando alle figure inferiori di qualche ordine non corrispondesse alcuna figura nell' ordine delle figure superiori, vi si deve sostituire una unità presa dal prossimo ordine a sinistra, e ridotta in unità di tale ordine inferiore.

370. La dimostr. di queste due operazioni si ripeta dai num. 342; e 346.

ESEM-

ESEMPIO.

371. Prob. 2. Cercasi quanto abbia variato l' inclinazione dell' Ecclittica con l'Equatore dal tempo di Aristarco Samio, quasi 300 anni avanti Gesù Cristo fino al tempo presente.

372. Risol. Da Eustachio Manfredi è stata determinata l' obliquità dell' Ecclittica di gradi 23°, 28', 30". Dall' Evelio fu trovata maggiore di questa di 1', 50". Ticone la fece maggiore di 1', 10", di quello l'aveva fatta l' Evelio. Albategnio 900 anni dopo Gesù Cristo la giudicò maggiore di quello l'aveva trovata Ticone, 3', 30". Tolomeo 140 anni dopo Gesù Cristo la scoprì 16' maggiore di quello l'aveva trovata Albategnio. Finalmente Aristarco Samio la determinò di 9' maggiore di quello l'aveva fatta Tolomeo. Per lo che sommando queste frazioni si viene a trovare, che al tempo di Aristarco Samio ella era di gradi 24°. Ora dai gradi 24° obliquità trovata da Aristarco Samio sottraendo gradi 23, 28', 30" obliquità trovata dal Manfredi, si hanno 31', 30", che è quanto ha variato l' inclinazione dell' Ecclittica con l' Equatore dal tempo di Aristarco Samio fino al tempo presente. Ecco il Calcolo.

Obliquità trovata dal Manfredi	23°	28'	30"	
Secondo l' Evelio maggiore di		1	50	
Secondo Ticone		1	10	
Secondo Albategnio		3	30	
Secondo Tolomeo		16		
Secondo Aristarco		9		
Obliquità al tempo di Aristarco Samio	24°	00	00	Somma

Obliquità al tempo di Aristarco	24°	00'	00"	cioè	23°	59'	60"
Obliquità al tempo del Manfredi	23	28	30		23	28	30
Differenza cercata						31	30

ARTICOLO XV.

Modo di moltiplicare le frazioni sessagesime.

373. PRob. 1. Si debbano moltiplicare insieme alcune frazioni sessagesime.

374. Risol. Si moltiplichi ciascun ordine del moltiplicante in tutti gli ordini del moltiplicando (giusta il num 122.), ed al prodotto di qualunque ordine nell' altro si dia per apice la somma degli apici del moltiplicatore e del moltiplicando. Lo che fatto si sommino questi prodotti parziali (pel num. 368.), e la loro somma darà il cercato prodotto totale.

375. La dim. si ripeta dal num. 362.

ESEM-

E S E M P I O.

376. Prob. 2. Cercaſi quanto ſpazio percorra il Sole della ſua Orbita nel tempo di ore 5, minuti *6*.

377. Riſol. Poichè il Sole in un' ora percorre della ſua Orbita $2'$, $27''$, $50'''$, ed in un minuto di tempo percorre $2''$, $7'''$, $50''''$, però ſi trovi prima lo ſpazio percorſo in *6* minuti con moltiplicare $2''$, $7'''$, $50''''$ per *6*; indi ſi trovi lo ſpazio percorſo in 5 ore con moltiplicare $2'$, $27''$, $50'''$ per 5, e la ſomma di queſti due prodotti darà lo ſpazio cercato.

	Spazio percorſo in un minuto		
	$2''$	$7'''$	$50''''$
Minuti			$6'$
Prodotto.	$12'''$	$42''''$	$300'''''$.

	Spazio percorſo in un' ora		
	$2'$	$27''$	$50'''$
Ore			5
Prodotto	$10'$	$135''$	$250'''$

Primo prodotto			$12'''$	$42''''$	$300'''''$
Secondo prodotto	$10'$	$135''$	$250'''$		
Somma	$12'$	$19''$	$22'''$	$47''''$	00

e però nel tempo di ore 5, minuti *6* il Sole percorrerà della ſua Orbita minuti 12, ſecondi 19, terzi 22, quarti 47.

ARTICOLO XVI.

Modo di fare la diviſione nelle frazioni ſeſſageſime.

378. PRob. 1. Si debba dividere una data frazione ſeſſageſima per un altra.

379. Riſol. Giuſta la regola della diviſione ſi cominci a dividere il primo ordine a ſiniſtra del dividendo per lo ſteſſo primo ordine del diviſore, ed il quoziente ſi ſcriva a parte; poſcia ſi moltiplichi queſto quoziente in tutto il diviſore, ed il prodotto ſi ſottri dal dividendo, ed il reſiduo ſi divida come pur'ora ſi è fatto; indi collo ſteſſo metodo ſi continui l' operazione. Che ſe le figure di qualche ordine non ſi poteſſero dividere colle figure del primo ordine del diviſore, in tal caſo quel tale ordine, che non può eſſere diviſo, ſi riduca mediante l' opportuna moltiplicazione all' ordine inferiore, e così ridotto ſi ſommi colle figure di tale ordine inferiore, poſcia ſi divida al ſolito queſto aggregato. L' apice poi, che deve avere ciaſcun quoziente è ſempre la differenza degli apici del dividendo, e del diviſore.

380. La dim. ſi ripeta dal num. 359.

381. Si ſarebbe anche potuto ridurre il dividendo, e il diviſore alla minima ſpezie, e poi fare la diviſione al ſolito. *ESEM-*

ESEMPIO.

382. Prob. 2. Debbansi dividere segni 5, 27°, 29', 4'', 25''', 57'''' per 10°, 11', 3''.

Risol. Si cominci primieramente a osservare se il primo numero 10 del divisore entra nel primo numero 5 del dividendo, e perchè non c' entra, però tale numero 5 si ritiri nel prossimo luogo inferiore, riducendolo (nel presente caso) in gradi, lo che si ottiene con moltiplicarlo per 30, ed al prodotto poi devesi aggiungere il seguente numero della stessa spezie, cioè i gradi 27, con che si hanno 177°. Ora si osservi quante volte in questo aggregato entra il primo numero 10 del divisore, e perchè c' entra 17 volte, però si scriva a parte questo quoziente 17: Indi con questo quoziente 17 si moltiplichi (pel num. 374.) tutto il divisore, ed il prodotto 5, 23°, 7, 51'' si sottri dal dividendo (pel num. 369.) Il residuo poi 4°, 21', 13'', 25''', 57'''' si divida come pur ora si è fatto pel primo numero 10 del divisore, cioè, perchè il 10 non entra nel 4, si riduca questo 4 alla spezie prossima inferiore mediante la moltiplicazione per 60, onde si avrà 240', che coi seguenti 21' fa 261', quali divisi per 10 danno di quoziente 26; ma perchè moltiplicandosi con questo quoziente 26 il divisore 10°, 11', 3'' si ha il prodotto 4°, 24' 47'', 18''', che non si può sottrarre da 4°, 21' 13'', 25''', 57'''', però devesi diminuire di una unità il quoziente, che sarà 25: poscia col fin' ora tenuto metodo si continui l' operazione. Ecco il Calcolo

Divisore	Dividendo						
10.° 11.' 3.''	5.	27.°	29.'	4.''	25.'''	57.''''	
Prodotto da sottrarsi	5.	23	7	51			
Residuo da dividersi		4	21	13	25	57	
Prodotto da sottrarsi		4	14	36	15		Quoz. 17.° 25.' 39.''
Residuo da dividersi			6	37	10	57	
Prodottto da sottrarsi			6	37	10	57	
Residuo			0	0	0	0	

Qualora si vogliano ridurre a frazione decimale alcune date frazioni sessagesime, si operi così. Si riducano le frazioni date all' ultima spezie; lo che fatto si moltiplichi il 60 per 60, ed il prodotto di nuovo per 60 tante volte, quante erano le diverse spezie delle minuzie sessagesime, e con questo prodotto si divida il numero delle frazioni sessagesime ridotte all' ultima spezie accresciuto di tanti zeri, quanti saranno necessarii, acciò si possa fare la divisione senza residuo, o almeno resti un' avanzo tale, che si possa trascurare: sotto poi a questo quoziente si ponga per denominatore l' unità accompagnata da tanti zeri, quanti ne furono aggiunti; o pure nel modo fino ad ora tenuto si separino nel quoziente tante figure a destra

con un punto, quanti furono i zeri aggiunti. Per Esempio essendo dati gradi 4, 1', 25", si vogliano espresse le frazioni sessagesime 1', 25" con una frazione decimale, si riducano le frazioni 1', 25" all' ultima spezie, e si avranno 85"; e perchè due sono le spezie delle frazioni sessagesime, si moltiplichi il 60 per 60 a fine di avere il divisore, che sarà 3600. Per fare poi la divisione si aggiungano (pel num. 333.) tanti zeri al dividendo 85", quanti se ne conoscono necessarii, acciò si possa fare la divisione esattamente, o pure resti un residuo affatto dispregievole, come aggiungendosi all' 85 cinque zeri, si avrà di quoziente 0. 02361 coll' avanzo $\frac{4}{3600000}$, che si può trascurare senza scrupolo; per lo che si avranno finalmente gradi 4. 02361 = gradi 4. 1', 25." La dim. dell'operazione costa dal num. 331.

CAPO III.

DELLE RAGIONI, E PROPORZIONI.

ARTICOLO I.

Delle nozioni circa le Ragioni.

383. DEF. 1. Quella quantità, che non misura perfettamente un' altra quantità, dicesi di lei parte aliquanta: Così il 3 è parte aliquanta del 10, perchè lo misura tre volte coll' avanzo 1.

384. Def. 2. Quella quantità chiamasi parte aliquota di un' altra quantità, quando la misura perfettamente: Come il 4 è parte aliquota del 20, perchè lo misura cinque volte senza residuo.

385. Corol. E siccome (pel num. 187.) una quantità, che misura un' altra qualunque quantità, misura ancora ogni altra quantità, che da questa quantità viene misurata; però le parti aliquote delle aliquote di una quantità sono anch' esse aliquote della medesima quantità.

386. Qualunque quantità poi può ricevere egual numero d' aliquote, così che quante ne ha una quantità, altrettante ne abbia un'altra; anzi ne possono avere un numero infinito, mentre (pel num. 6.) la divisione della quantità non riconosce alcun limite.

387. Def. 3. Simili parti aliquante diconsi quelle, che contengono egual numero di volte la stessa parte aliquota de' loro tutti: Come 8, 16 sono simili parti aliquante di 14, e 28, perchè siccome l' 8 contiene quattro parti settime del tutto 14, cioè quattro volte il 2, così il 16 contiene quattro parti settime del tutto 28, cioè quattro volte il 4.

388. Def. 4. Simili parti aliquote sono quelle, le quali misurano egual numero di volte i loro tutti: Come 2, e 3 sono simili parti aliquote di 10, e 15, perchè tanto il 2, come il 3 si contiene nel suo tutto cinque volte.

389. Def. 5. Quantità moltiplice rispetto ad un' altra è quella, che contiene quest' altra più volte, o sia che la contenga perfettamente, o no. Quella poi, che è più volte contenuta dicesi submoltiplice.

390. Def. 6. Quantità egualmente moltiplici di una, o più quantità diconsi quelle, che contengono egualmente dette quantità: Come 12, e 18 sono egualmen-

mente moltiplici di 4, e di 6. Lo stesso intendasi delle egualmente submoltiplici.

391. Corol. Per lo che le quantità egualmente moltiplici, o submoltiplici di un' altra quantità, o di quantità eguali, sono eguali tra loro.

392. Def. 7. La ragione non è altro, che la comparazione, che si fa di una quantità ad un' altra omogenea.

393. Siccome poi in due maniere si possono paragonare fra loro le quantità, quindi si hanno due spezie di ragioni. Nella prima maniera si possono paragonare tra loro le quantità, considerando l' eccesso, o il difetto di una per rapporto all' altra; e questa dicesi ragione aritmetica, la quale ha luogo nella somma, e nella sottrazione: Nella seconda maniera si paragonano tra loro le quantità considerando come una contiene, o è contenuta nell' altra; e questa dicesi ragione geometrica, la quale ha luogo nella moltiplicazione, e nella divisione.

394. Def. 8. Le quantità omogenee, che si paragonano, dieonsi termini della ragione; quello, che si paragona con un' altro, chiamasi antecedente; quello con cui si fa la comparazione, si dice conseguente.

ARTICOLO II.

Della Ragione Aritmetica.

395. DEf. 1. La ragione aritmetica consiste nella comparazione, che si fa di una quantità ad un' altra, mediante cui si considera l' eccesso, o la differenza, con cui la prima supera la seconda, o da lei viene superata.

396. Def. 2. Questo eccesso, o differenza tra un termine, e l' altro dicesi Esponente, o Indice della ragione.

397. Def. 3. Ragioni aritmetiche eguali, o simili sono quelle, che hanno esponenti eguali: Come la ragione di 5 a 2 è simile alla ragione di 9 a 6; di 17 a 14, perchè di ciascuna l' esponente è 3. Ragioni poi aritmetiche ineguali sono quelle, che hanno esponenti ineguali.

398. Corol. Poichè nelle ragioni aritmetiche si considera unicamente la differenza tra un termine, e l' altro, che è il loro esponente, qualora sarà dato questo esponente, e il termine maggiore della ragione, si avrà il minore con sottrarre tale esponente dal dato termine maggiore: O pure dato l' esponente, e il termine minore, si avrà il maggiore con aggiungere l' esponente al dato termine minore. Se poi saranno dati i due termini della ragione, si avrà l' esponente con sottrarre il termine minore dal maggiore.

ARTICOLO III.

Della Proporzione Aritmetica.

399. DEf. 1. La proporzione aritmetica consiste nell' eguaglianza di due ragioni aritmetiche, o sia nell' eguaglianza de' loro esponenti: E però quattro quantità saranno aritmeticamente proporzionali, quando la prima sarà tanto maggiore, o minore della seconda, come la terza della quarta: E questa dicesi proporzione aritmetica discreta, la quale si esprime così $13 - 7 = 16 - 10$; o sia $13 . 7 :: 16 . 10$

400. Quando poi il conseguente della prima ragione è lo stesso, che l' antece-

dente della seconda, come quì $25 - 14 = 14 - 3$, la proporzione dicesi continua; e quel termine, che fa le veci di antecedente, e di conseguente si chiama medio proporzionale: Ella poi si indica così .·. 25 . 14 . 3, o pure ÷ 25 . 14 . 3.

401. Corol. 1. Dati essendo pertanto più termini in proporzione aritmetica continua, essi si supereranno vicendevolmente l'un l'altro con eguale differenza, o sia esponente, ed ognuno degl' intermedii, cioè a riserva del primo, e dell'ultimo, farà le veci e di conseguente, e di antecedente. Quando si va sempre aggiugnendo l'esponente al termine, che viene dopo, la proporzione dicesi continua ascendente, come questa

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. ec.

e pel contrario dicesi discendente, quando si va continuamente levando l'esponente a ciascun termine per avere il termine, che vien dopo, come questa

24. 21. 18. 15. 12. 9. 6. 3.

402. Corol. 2. E però nella proporzione continua discendente la ragione del primo termine al terzo è doppia della ragione del primo al secondo, cioè ha un' esponente doppio: così la ragione del primo al quarto è tripla del primo al secondo; e la ragione del primo al quinto è quadrupla ec.

403. Corol. 3. La differenza poi dei termini estremi di una proporzione continua conseguentemente risulta dall' aggregato di tutte le differenze de' termini intermedii.

404. Teor. 1. Quattro quantità in proporzione aritmetica sono sempre proporzionali comunque si dispongano riguardo al luogo, purchè tanto le estreme quanto le medie rimangano sempre o estreme, o medie.

405. Dim. Quando le quantità estreme diventano medie, e le medie estreme, la cosa è evidente, perchè ognuna delle due ragioni sussiste sempre tra gli stessi due termini, non facendosi altro, che cambiare l' antecedente in conseguente, e il conseguente in antecedente, onde se prima si riferiva la maggiore alla minore, ora si riferisca la minore alla maggiore, e *vice versa*. Quando poi le estreme restano bensì estreme, e le medie rimangono medie, ma cambiano posto, diventando antecedenti quelle, che erano conseguenti, e facendosi conseguenti quelle, che erano antecedenti, in tal caso non si fa altro, che paragonare il primo termine della data proporzione al terzo, ed il secondo al quarto, formandone così due nuove ragioni, una cogli antecedenti, l' altra coi conseguenti, d' una delle quali i termini non differiscono dai termini dell' altra, se non in quanto che sono accresciuti dell' esponente delle prime ragioni; dunque perchè accrescendosi egualmente e gli antecedenti, e i conseguenti d' una di due ragioni eguali, i nuovi esponenti risultano eguali, le due nuove ragioni saranno simili, e però i loro quattro termini saranno tuttavia proporzionali. Lo che si doveva dimostrare.

Essendo per Esempio proposto $13 - 7 = 16 - 10$, o sia $6 + 7$ a 7, così $6 + 10$ a 10, saranno proporzionali ancora nei seguenti modi:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
7 & . & 6+7 & = & 10 & . & 6+10 \\
7 & . & 10 & = & 6+7 & . & 6+10 \\
10 & . & 7 & = & 6+10 & . & 6+7 \\
10 & . & 6+10 & = & 7 & . & 6+7 \\
6+10 & . & 10 & = & 6+7 & . & 7 \\
6+7 & . & 7 & = & 10+6 & . & 10 \\
6+7 & . & 6+10 & = & 7 & . & 10
\end{array}$$

406. Teor. 2. Di quattro quantità aritmeticamente proporzionali la fomma delle eftreme è eguale alla fomma delle medie: Come effendo $13 - 7 = 16 - 10$ farà $13 + 10 = 16 + 7$, cioè $23 = 23$.

407. Dim. Poichè in qualunque ragione aritmetica (pel num. 390.) il termine maggiore non è altro, che il termine minore più l' efponente, la fomma delle eftreme quantità della data proporzione rifulta dall' aggregato dell' efponente, del termine minore della prima, e del termine minore della feconda ragione; parimente la fomma delle medie rifulta dall' aggregato dell' efponente, del termine minore della feconda, e del termine minore della prima ragione: Dunque quefte due fomme rifultano dall' aggregato degli fteffi elementi, e però fono eguali. Lo che fi doveva dimoftrare.

408. Corol. 1 Quindi, fe faranno date tre quantità in proporzione aritmetica continua, il doppio di quella di mezzo farà eguale alla fomma delle eftreme: Come avendofi $\div 9 . 6 . 3$ farà $9 + 3 = 6 + 6$, cioè $12 = 12$.

409. Corol. 2. E però fe di tre quantità continue proporzionali farà data la feconda, e la terza, fi avrà la prima con levare la terza dal doppio della feconda: Come effendo dato 14, e 3, farà $14 + 14 - 3 = 25$, che è la prima cercata. Se farà data la prima, e la feconda, fi avrà la terza con fottrarre la prima dal doppio della feconda: Così effendo dato 25, e 14, farà $14 + 14 - 25 = 3$, che è la terza cercata. Se poi farà data la prima, e la terza, fi avrà la feconda con prendere la metà della fomma della prima, e della terza: Per Efempio effendo dato 25, e 3, farà $\frac{25+3}{2} = \frac{28}{2} = 14$, che è la feconda cercata. La dimoftrazione di quefto corollario cofta dal num. 45, come pure la dimoftrazione del feguente.

410. Corol. 3. Parimente di quattro quantità in proporzione difcreta effendo date le tre prime fi avrà la quarta con fottrarre la prima dalla fomma delle due di mezzo. O pure date le tre ultime fi avrà la prima con fottrarre la quarta dalla fomma delle due di mezzo. Se fi dovrà trovare la feconda, bifognerà fottrarre la terza dalla fomma delle eftreme. Ovvero dovendofi trovare la terza, dovraffi fottrarre la feconda dalla fomma delle eftreme.

411. Corol. 4. Dal num. 402 s' intende, che di quattro quantità in proporzione aritmetica continua effendo date la prima, e la quarta fi avrà la feconda con prendere la terza parte della fomma della quarta col doppio della prima: Così di cinque effendo date la prima, e la quinta fi avrà la feconda con prendere la quarta parte della fomma della quinta col triplo della prima ec. Si fuppone, che la prima di tali quantità fia la minore.

AR-

ARTICOLO IV.

Della Ragione Geometrica.

412. DEf. 1. La ragione geometrica consiste nella comparazione, che si fa di una quantità ad un'altra rispetto al modo, che una contiene, o è contenuta nell'altra, in quanto che cioè la contiene una, o più volte esattamente, o con residuo consistente in una, o più sue parti. Il numero poi, che esprime quante volte una contiene, o è contenuta nell'altra, dicesi Esponente, o sia Denominatore della ragione.

413. Corol. 1. Per mezzo adunque de' denominatori si distinguono le ragioni.

414. Corol. 2. Quindi a misura, che di una proposta ragione si diminuirà il primo termine, si diminuirà pure la ragione del primo termine al secondo, e però all'opposto crescerà la ragione del secondo al primo; ed a misura, che si diminuirà il secondo, diminuirà la ragione del secondo al primo, ed all'opposto crescerà la ragione del primo al secondo: Come essendo la ragione di 24 a 12, in cui il primo termine 24 contiene due volte il secondo 12, se si dividerà il primo termine, o il secondo per qualche quantità, come per 2, in tal caso con. dividersi il primo si diminuirà la ragione del primo al secondo, e si accrescerà la ragione del secondo al primo, in quanto che il secondo è meno volte contenuto nel primo di quello lo fosse avanti la divisione: Che se si dividerà il secondo crescerà la ragione del primo al secondo, o sia diminuirà la ragione del secondo al primo, in quanto che il secondo è più volte contenuto nel primo di quello lo fosse avanti la divisione: Di fatto nel primo caso sarà $\frac{24}{2} = 12$ a 12, e nel secondo sarà 24 a $\frac{12}{2} = 6$. Che se in vece di usare la divisione si adoprerà la moltiplicazione, moltiplicando cioè il primo, o il secondo per qualche quantità; in tal caso moltiplicando il primo si accrescerà la ragione del primo al secondo, e si diminuirà la ragione del secondo al primo; e moltiplicando il secondo si diminuirà la ragione del primo al secondo, e si accrescerà la ragione del secondo al primo. Dove si può vedere, che quello, che fa la moltiplicazione, lo fa egualmente la divisione; mentre volendosi accrescere la ragione del primo termine al secondo, sarà lo stesso o moltiplicare il primo per l'opportuna quantità, o per la stessa dividere il secondo: E *vice versa* per diminuire la ragione del primo al secondo sarà lo stesso, o dividere il primo per l'opportuna quantità, o per la stessa moltiplicare il secondo.

415. Corol. 3. E' manifesto dal num. 412. che per conoscere la ragione, che passa fra due date quantità, bisognerà dividere la quantità maggiore per la minore, nel qual caso il quoziente sarà l'esponente.

416. Corol. 4. Quindi il termine maggiore è il prodotto del termine minore nell'esponente; ed il minore è il quoziente, che nasce dal dividersi il termine maggiore per l'esponente.

417. Corol. 5. Per lo che in qualsivoglia ragione l'esponente sta all'unità (pel num. 126.) come il termine maggiore sta al minore; o pure l'unità all'esponente come il termine minore al maggiore. E generalmente l'esponente sta all'unità come il primo termine al secondo.

418. Corol. 6. Conseguentemente se uno dei termini della ragione sarà l'unità, l'altro termine sarà l'esponente.

419.

419. Corol. 7. La ragione pertanto non può darsi (pel num. 39.), che fra quantità omogenee.

420. Le ragioni si scrivono così: Per Esempio 12 : 3, o pure $\frac{12}{3}$ e vuol dire, che l' antecedente 12 contiene il 3 quattro volte, e però il conseguente 3 è contenuto quattro volte nel 12.

421. Def. 2. Ragione razionale è quella, che si può esprimere con numeri, o sia il di cui esponente è un numero razionale: Come queste 24 : 6; o 17 : 11

422. Def. 3. Ragione irrazionale è quella, che non si può esprimere con numeri, o sia il di cui esponente è una quantità irrazionale. Che cosa poi siano le quantità irrazionali, lo diremo a suo luogo.

423. Siccome le quantità sono eguali, o ineguali, e le ragioni vengono espresse dagli esponenti, o denominatori, che altro non sono, che certe quantità; però le ragioni sono pure o di egualità, o d' inegualità.

424. Def. 4. Ragione d' egualità è quella, in cui l' antecedente è eguale al conseguente, come 7 : 7; 13 : 13. Per lo che il suo denominatore è l' unità (pel num. 129.) Onde se una ragione avrà per denominatore l' unità, ella sarà ragione d' egualità.

425. Def. 5. Ragione d' inegualità è quella, in cui l' antecedente è maggiore, o minore del conseguente.

426. La ragione d' inegualità è di due sorti. La prima dicesi di maggiore inegualità, e consiste nel rapporto del maggior termine al minore. Se il maggiore contiene più volte il minore la ragione dicesi moltiplice giusta il num. 389; e se lo contiene esattamente dicesi ragione dupla quando il denominatore è 2; se è 3, dicesi tripla; se è 4, dicesi quadrupla ec. Che se l' antecedente, che deve essere il termine maggiore contiene alcuna volta il conseguente, e in oltre una, o più sue parti aliquote; in tal caso se l' antecedente contiene il conseguente per Esempio una volta e mezza, come 3 : 2 la ragione si dice sesquialtera: Se una volta e un terzo, come 4 : 3, si dice sesquiterza: Se una volta e un quarto; come 5 : 4, si chiama sesquiquarta ec. Se poi lo contiene più volte, e di più una parte aliquota, la ragione si chiamerà doppia, tripla ec. sesquialtera; doppia, tripla sesquiterza ec. Quando l' antecedente contiene una volta il conseguente più alcune sue parti aliquote, per Esempio una volta e due terzi, come 5 : 3, la ragione si dice surbiparziente terza: Se una volta, e tre quarti, come 7 : 4, si chiama surtriparziente quarta ec. Che se lo contiene più volte, e in oltre alcune sue parti aliquote: Per Esempio se due volte, e un terzo, la ragione si dirà doppia superparziente terza, come 7 : 3; se quattro volte e due quinti, si dirà quadrupla surbiparziente quinta ec.

427. La seconda dicesi di minore inegualità, e consiste nel rapporto del minor termine al maggiore, in quanto che l' antecedente è minore del conseguente. Se l' antecedente è contenuto più volte nel conseguente ella dicesi submoltiplice giusta il num. 389. E relativamente al precedente num. 426. ella dirassi suddupla, suttripla ec.; subsesquialtera, subsesquiterza ec.; suddupla sesquialtera, suttripla sesquiterza ec.; susurbiparziente terza; susurparziente sesta ec.

428. Questi nomi però comunemente non si usano, ma si sogliono unicamente esprimere le ragioni coi numeri: come la ragione tripla così 3 : 1; la sesquialtera così 3 : 2 ec.

429. Corol. 1. S' intende pertanto, che se l' antecedente di qualsivoglia ragione è moltiplice del conseguente, il conseguente sarà egualmente submoltiplice dell' antecedente.

430.

430. Corol. 2. Onde se di due quantità, come la prima contiene la seconda, o in essa è contenuta, così la seconda sia contenuta, o contenga la prima, queste due quantità saranno eguali.

431. Corol. 3. La ragione poi moltiplice ci viene esibita da un denominatore, che è un numero intiero; e la submoltiplice da una frazione.

432. Def. 6. Ragione egualmente submoltiplice di una data ragione moltiplice è quella, che ha per esponente una frazione, il di cui numeratore è l'unità, e il denominatore è l'esponente della ragione moltiplice: così la ragione 3: 12 è egualmente submoltiplice della ragione moltiplice 8 : 2.

433. Def. 7. Quelle ragioni sono simili, o eguali, che hanno lo stesso esponente. E quì si rifletta, che altro è dire ragioni eguali, altro è dire ragioni d'egualità: per esempio la ragione 20 : 5 è eguale alla ragione 12 : 3, perchè tanto della prima, come della seconda l'esponente è 4. E quelle sono ineguali, che hanno esponenti ineguali.

434. Corol. 1. Onde se saranno date due ragioni eguali, quanto l'antecedente della prima è moltiplice del suo conseguente, altrettanto l'antecedente della seconda è moltiplice del suo conseguente: e però (pel num. 429.) quanto l'antecedente della prima è moltiplice del suo conseguente, altrettanto il conseguente della seconda sarà submoltiplice del suo antecedente, o sia sarà egualmente submoltiplice giusta il num. 432.

435. Corol. 2. E però se la ragione 18 : 3 è moltiplice della ragione 4 : 2, così la ragione 3 : 18 sarà egualmente submoltiplice della ragione 2 : 4.

436. Corol. 3. Poichè due quantità eguali contengono egualmente una terza qualsivoglia quantità, o pure in essa ciascuna di loro è egualmente contenuta, se a questa terza quantità le due suddette si riferiranno, avranno ad essa ragioni eguali; o sia questa terza avrà a quelle due la stessa ragione. Euclide lib. 5. prop. 7. Come quì ho notato che questa proposizione è d'Euclide, così in appresso additerò tutte l'altre, che dal lib. 5. dello stesso Euclide sono prese.

437. Corol. 4. Conseguentemente se due quantità avranno ad una terza ragioni eguali; o pure se una quantità qualunque avrà a due altre quantità egual ragione, queste due quantità saranno eguali tra loro: come essendo la ragione, che ha la quantità 7 alla quantità 2 eguale alla ragione, che ha la stessa quantità 7 ad un'altra, sarà questa necessariamente eguale a 2. Euclide lib. 5. prop. 9.

438. Corol. 5. Che se due quantità ineguali si riferiranno ad una terza quantità, la maggiore di tali quantità avrà alla terza maggior ragione di quella, vi abbia la minore: e *vice versa* (pel num. 429.) questa terza quantità avrà alla maggiore delle due proposte minor ragione di quello abbia all'altra minore. Euclide l. 5. prop. 8.

439. Corol. 6. E però se una qualunque quantità avrà inegual ragione a due quantità date, esse saranno ineguali, e quella sarà maggiore, che avrà a tale quantità maggior ragione, o a cui detta terza quantità avrà minor ragione. Euclide l. 5. prop. 10.

440. Def. 8. Ragione di due ragioni geometriche è la ragione geometrica de' loro esponenti.

441. Corol. 1. E però quando si fa il rapporto di una ragione ad un'altra, o di più ragioni tra loro, non altro si fa, che esprimere la ragione, che ha il denominatore di una al denominatore dell'altra, o pure tra loro i denominatori delle date ragioni: per esempio volendosi paragonare la ragione 24: 3 alla ragione

10 :

10 : 5 si dirà, che la prima sta alla seconda come 8 : 2, perchè l'esponente della pima è 8, e della seconda è 2, ed il loro rapporto si esprimerà così $\frac{24}{3}$: $\frac{10}{5}$. E siccome la ragione di due quantità ci viene espressa dall'esponente, così l'esponente, che ci dà la ragione degli esponenti di due ragioni, darà il loro rapporto.

442. Corol. 2. Quindi le ragioni sono, e devonsi concepire come quantità, cui però quei rapporti competono, che a qualsivoglia genere di quantità convengono.

443. Corol. 3. Per lo che se una ragione sarà moltiplice di un'altra, quest'altra sarà submoltiplice di quella; cioè se il denominatore della prima è moltiplice del denominatore della seconda, sarà il denominatore della seconda submoltiplice del denominatore della prima.

444. Corol. 4. Che se come la prima è moltiplice, o submoltiplice della seconda, così egualmente la seconda sia rispettivamente moltiplice, o submoltiplice della prima, queste due ragioni saranno eguali.

445. Corol. 5. Se poi date due ragioni, l'antecedente della prima sarà moltiplice, o submoltiplice del suo conseguente, ma l'antecedente della seconda non sia rispettivamente moltiplice, o submoltiplice del suo conseguente, cioè sia submoltiplice, o moltiplice, la ragione della prima sarà moltiplice, o rispettivamente submoltiplice della seconda.

446. Def. 9. I termini minimi di una ragione sono i numeri minori, con cui ella può essere espressa.

447. Corol. Quindi i minimi termini di qualunque ragione sono fra loro numeri primi.

ARTICOLO V.

Della Proporzione Geometrica.

448. DEf. 1. La proporzione geometrica non è altro, che la somiglianza di due ragioni geometriche, che si paragonano, in quanto che hanno lo stesso denominatore: onde è, che quattro quantità si dicono geometricamente proporzionali, ogniqualvolta come la prima contiene, o è contenuta nella seconda, egualmente la terza contenga, o sia contenuta nella quarta.

449. Corol. 1. Per lo che se l'antecedente della prima ragione è eguale, o maggiore, o minore del suo conseguente, anche l'antecedente della seconda ragione sarà eguale, o egualmente maggiore, o minore rispettivamente del suo conseguente. In avvenire per esprimere generalmente ciascuno di questi tre rapporti mi servirò di questa comune espressione: Come sta il primo termine al secondo, così sta il terzo al quarto.

450. Corol. 2. Se pertanto due ragioni saranno eguali, e il conseguente di una sia eguale al conseguente dell'altra, perchè in tal caso ciascun antecedente di queste due ragioni deve essere eguale, o egualmente maggiore, o egualmente minore del suo conseguente, questi due antecedenti saranno eguali fra loro (pel num. 437.). Ed essendo eguali gli antecedenti, lo saranno ancora i conseguenti.

451. Corol. 3. Parimente essendo date due proporzioni, se tre termini della prima saranno eguali a tre termini della seconda presi col medesimo ordine, anche l'altro termine della prima sarà eguale all'altro corrispondente termine della seconda.

452. Def. 2. Di una proporzione gli antecedenti fra loro, e i conseguenti fra loro si chiamano termini omologhi.

453. Def. 3. Quantità in proporzione continua sono quelle, delle quali ognuna all' altra ha egual ragione, e in oltre la prima sola è soltanto antecedente, e l' ultima sola è soltanto conseguente, ma ciascuna delle intermedie fa le veci prima di conseguente, poscia di antecedente: Così di queste due ragioni 18 : 6, 6 : 2 i termini 18, 6, 2 sono in proporzione continua, e la ragione di un termine all' altro viene espressa dallo stesso denominatore.

454. Corol. 1. Dal che si vede, che in tre soli termini sussiste la proporzione continua.

455. Corol. 2. Poichè nella proporzione continua il denominatore è sempre lo stesso; e (pel num. 416.) dato il denominatore, e il termine minore di una ragione si ha il termine maggiore con moltiplicare il termine minore nel denominatore; però dato il denominatore, e una qualunque quantità, si troveranno le altre susseguenti in proporzione continua con moltiplicare il denominatore nella quantità data, ed il prodotto moltiplicarlo di nuovo nel denominatore, e così di seguito: come essendo dato il 4 per denominatore, ed una qualunque quantità per esempio 2, si avrà 2, 2 X 4, 8 X 4, 32 X 4, 128 X 4 ec. e questa chiamasi proporzione continua ascendente, perchè i di lei termini continuamente crescono, ma però nella stessa ragione. La proporzione poi continua discendente è quella, i di cui termini continuamente decrescono nella stessa ragione, e di cui, dato il denominatore, e un qualunque termine, si trovano gli altri con dividere primieramente il termine dato pel denominatore, indi il quoziente, che sarà il secondo termine, dividerlo pure pel denominatore, e così di seguito: come essendo dato il 54, e per denominatore il 3, la proporzione continua sarà $\frac{54}{3}$, $\frac{18}{3}$, $\frac{6}{3}$, 2 cioè 54, 18, 6, 2.

456. Dall' esponente viene denominata la proporzione, cioè se l' esponente è 2, 3, 4 ec., la proporzione dicesi dupla, tripla ec., ovvero suddupla, suttripla ec. secondo che i termini sono discendenti, o ascendenti.

457. Corol. 1. Dal sussistere lo stesso denominatore crescendo ciascun termine maggiore rispetto al prossimo minore in ragione dell' esponente all' unità, chiaramente s' intende, che di tre dati termini in proporzione continua la somma del primo col terzo è maggiore del doppio del secondo (pel num. 416.). E di quattro termini in proporzione continua la somma degli estremi è maggiore della somma de' medii. Euclide lib. 5. prop. 25.

458. Def. 4. Nella proporzione continua quel termine, che fa le veci di conseguente rispetto ad una ragione, e di antecedente rispetto all' altra, chiamasi medio proporzionale geometrico.

459. Il segno della proporzione continua è questo $\div\!\!:$, e però si scrive così $\div\!\!:$ 2, 8, 32, 128, 512 ec., ovvero $\div\!\!:$ 512, 128, 32, 8, 2. Altri usano ancora questo : : , facendo : : 2, 8, 32 ec.

460. Def. 5. Proporzione discreta è quella, in cui il conseguente della prima ragione è diverso dall' antecedente della seconda: e però i termini di queste due ragioni 12 : 4; 6 : 2 sono in proporzione discreta, e si scrivono così 12 : 4 : : 6 : 2, o pure 12 : 4 = 6 : 2, cioè $\frac{12}{4} = \frac{6}{2}$. Il primo, e l' ultimo di questi quattro termini, cioè 12, 2 si chiamano estremi; il secondo, e il terzo 4, 6 si dicono medii.

Qua-

Qualora alcune quantità si dicono proporzionali senz'altro, s'intende sempre in proporzione discreta.

461. Def. 6. La proporzione dicesi diritta quando il primo termine sta al secondo, come il terzo al quarto.

ESEMPIO.

Insegnano i Filosofi, che se saranno due corpi A, B egualmente distanti dal corpo D, la forza, con cui questi due corpi attraggono, o sono attratti dal corpo D, è in ragione delle loro masse. Ora questa è proporzione diritta, perchè come sta la massa del corpo A alla forza, con cui attrae, o è attratto dal corpo D, così sta la massa del corpo B alla forza, con cui attrae, o è attratto dal corpo D; o pure come sta la massa del corpo A alla massa del corpo B, così sta la forza con cui A attrae, o è attratto dal corpo D alla forza con cui B attrae, o è attratto da D. E però nella proporzione diritta essendo il primo termine omogeneo al secondo, deve il terzo essere omogeneo al quarto; o pure essendo il primo omogeneo al terzo, deve il secondo essere omogeneo al quarto.

462. Def. 7. La proporzione dicesi reciproca; o sia quattro quantità si dicono in proporzione reciproca, o rovescia, quando il primo sta al secondo, come il quarto al terzo; o pure, ch'egli è lo stesso, quanto il primo è maggiore, o minore del secondo, altrettanto il terzo è rispettivamente minore, o maggiore del quarto.

ESEMPIO.

Costa dall'esperienza, che le qualità, le quali partono da un centro, e si estendono in cerchio all'intorno, diminuiscono in attività in ragione reciproca duplicata della distanza, a cui si estendono: come se la terra fosse quattro volte più lontana dal sole di quello ella è presentemente, sarebbe sedici volte meno attirata, sedici volte meno illuminata, sedici volte meno riscaldata dal sole; e però l'attrazione, il calore ec. del sole rispetto alla terra decresce a misura, che cresce la distanza della terra dal sole moltiplicata in se stessa; e lo stesso è in tutte le altre proporzioni reciproche, mentre a tenore, che nella prima ragione cresce un'omogeneo rispetto all'altro, nella seconda succede il contrario; così qui a misura, che la distanza cresce rispetto alla prima, la corrispondente attrazione, il corrispondente calore ec. rispetto alla prima decresce nella stessa ragione, che il prodotto della accresciuta distanza moltiplicata in se stessa si fa maggiore della prima distanza moltiplicata pure in se stessa; cioè a dire, che come sta il prodotto della accresciuta distanza moltiplicata in se stessa alla prima distanza moltiplicata pure in se stessa, così sta l'attrazione, il calore ec. corrispondente alla prima distanza, all'attrazione ec. corrispondente alla distanza accresciuta, quando secondo la regola diritta dovrebbe stare l'attrazione ec. relativa alla prima distanza alla stessa distanza moltiplicata in se stessa, come l'attrazione ec. relativa alla distanza accresciuta a tale distanza accresciuta moltiplicata in se stessa.

463. Def. 8. Ragioni geometricamente proporzionali sono quelle, che hanno i loro denominatori geometricamente proporzionali.

464. Egli è da osservarsi, che quantunque giusta il num. 419. la ragione non si possa avere, che fra due quantità omogenee; nondimeno la ragione, che ritrovasi fra due quantità di un genere, si può rappresentare con due altre quantità di qualsivoglia altro genere, in quanto che si considerano i puri numeri esprimenti tali quantità, non le quantità stesse, e in questo modo saranno proporzionali quattro termini rappresentanti due ragioni, che si riferiscono a quantità di diversa spezie; imperocchè esprimendosi qualunque spezie di quantità con numeri relativi ad una unità arbitrariamente assunta in ciascuna spezie, con sostituirsi in ogni proporzione questi numeri a tali quantità, vengonsi a rendere della medesima spezie i quattro termini della data proporzione, e così hanno luogo le operazioni necessarie a farsi nelle proporzioni. Per Esempio quando si dice, che l'attrazione è in ragione diritta delle masse, e inversa duplicata delle distanze, cioè è in ragione delle masse divise per i quadrati delle distanze, ben si vede, che essendo le masse, e le distanze, quantità di diversa natura, non si possono quelle dividere per queste: ma se tanto le masse, come le distanze si esprimeranno con puri numeri, in tal caso ottimamente sussisterà, che le attrazioni, che esercita un Corpo verso altri due siano tra loro, come le masse di questi altri due Corpi divise per i quadrati delle rispettive distanze, cioè come i numeri esprimenti le masse divisi per i quadrati de' numeri esprimenti le distanze: E però dividere le masse per i quadrati delle distanze a fine di avere la ragione delle attrazioni, non vuol dir altro, che trovare la ragione, che ha la ragione delle parti della massa alla sua unità, alla ragione delle parti della distanza alla sua unità.

465. Poichè (pel num. 448.) la proporzione è l'eguaglianza di due ragioni, e (pel num. 49.) quando due quantità sono eguali una si può sostituire in luogo dell'altra, se saranno date due proporzioni, nella prima, e nella seconda delle quali entri una stessa ragione, in vece di questa ragione si potrà sostituire l'altra ragione, a cui si paragona, o nella prima, o nella seconda di queste proporzioni: Come essendo $21:9::7:3$, e $35:15::7:3$, sostituendo nella prima proporzione $35:15$ in luogo di $7:3$, cui ella eguale, si avrà $21:9::35:15$; o pure sostituendo nella seconda proporzione $21:9$ in luogo di $7:3$, a cui è eguale, si avrà $35:15::21:9$.

466. Teor. 1. Se due ragioni avranno lo stesso antecedente, esse staranno fra loro in ragione reciproca de' conseguenti, cioè la prima ragione starà alla seconda, come il conseguente della seconda sta al conseguente della prima: Per Esempio essendo le due ragioni $5:7$, e $5:9$, sarà $\frac{5}{7}:\frac{5}{9}::9:7$

467. Dim. Se una stessa quantità (pel num. 438.) si riferirà a due quantità ineguali, essa avrà minor ragione alla maggiore, e maggiore alla minore; ma la ineguaglianza di queste due ragioni è proporzionale alla diversa grandezza delle due quantità, cui la data, come antecedente, si riferisce; dunque la prima ragione sarà tanto maggiore, o minore della seconda, quanto il conseguente della seconda sarà maggiore, o minore del conseguente della prima, e però queste due ragioni staranno tra loro in ragione reciproca de' conseguenti. Lo che si doveva dim.

468. Corol. 1. Per lo che se una stessa quantità si dividerà per due quantità ineguali, i quozienti saranno reciprocamente proporzionali ai divisori, o pure se due, o più quantità date si sommeranno, ovvero si moltiplicheranno insieme, indi tale somma, o prodotto si divida per ciascuna di loro, i quozienti, che ne verranno, presi con ordine rovescio avranno fra loro la stessa ragione, che hanno le quantità date: Per Esempio essendo dato 4, 8, 16, la di cui somma è 28, se si dividerà questa somma per ciascuna di loro, si avrà $\frac{28}{16}$

$$\frac{28}{16} : \frac{28}{8} : \frac{28}{4},$$

$$\text{cioè } 1\tfrac{3}{4} : 3\tfrac{1}{2} : 7$$

$$4 : 8 : 16$$

lo ſteſſo ſi dica del loro prodotto ec.

469. Corol. 2. Che ſe ſaranno date quattro ragioni proporzionali, le quali abbiano lo ſteſſo antecedente, come ſta il conſeguente della ſeconda al conſeguente della prima, così ſtarà il conſeguente della quarta al conſeguente della terza.

470. Corol. 3. Se poi ſaranno date due ragioni, delle quali la prima ſtia alla ſeconda, come il conſeguente della ſeconda ſta al conſeguente della prima, gli antecedenti di queſte due ragioni ſaranno eguali.

471. Corol. 4. Qualora adunque ſaranno date quattro ragioni, delle quali le due prime abbiano lo ſteſſo antecedente, e così pure le due ultime; ed in oltre il conſeguente della prima, e della terza ſia lo ſteſſo, e lo ſteſſo ſia il conſeguente della ſeconda, e della quarta, ſtarà la prima alla ſeconda, come la terza alla quarta: Per Eſempio eſſendo date queſte quattro ragioni 32 : 8, 32 : 16, 48 : 8 : 48 : 16, ſarà $\frac{32}{8} : \frac{32}{16} :: \frac{48}{8} : \frac{48}{16}$.

472. Corol. 5. E però ſe ſaranno date quattro ragioni proporzionali, tre delle quali abbiano lo ſteſſo antecedente, ed in oltre la prima, e la terza abbiano lo ſteſſo conſeguente, e così pure la ſeconda, e la quarta, anche l' antecedente della rimanente ſarà eguale agli altri antecedenti.

473. Teor. 2. Se due ragioni avranno lo ſteſſo conſeguente, eſſe ſtaranno fra loro in ragione degli antecedenti: Per Eſempio eſſendo date le due ragioni 11 : 3, 17 : 3, ſarà $\frac{11}{3} : \frac{17}{3} :: 11 : 17$.

474. La dim. coſta dal num. 440, e 412, imperocchè le ragioni ſtando fra loro in ragione de' proprii eſponenti; e l' eſponente eſprimendo quante volte l' antecedente contiene, o è contenuto nel conſeguente, eſſendo (per Ipoteſi) lo ſteſſo il conſeguente di ambedue le ragioni, l' eſponente corriſponderà alla diverſa grandezza dell' antecedente, così che tanto maggiore, o minore ſarà l' eſponente, quanto maggiore, o minore ſarà l' antecedente; e però l' eſponente della prima ragione ſtarà all' eſponente della ſeconda, come l' antecedente della prima all' antecedente della ſeconda, e conſeguentemente le date ragioni ſtaranno fra loro in ragione degli antecedenti. Lo che ſi doveva dimoſtrare.

475. Corol. 1. Se adunque più quantità ſi divideranno per una ſteſſa quantità, i quozienti, che ne verranno, avranno fra loro le ſteſſe ragioni, che hanno le quantità diviſe: Come eſſendo queſte quantità 48, 36, 27, 18, 12, e dividendo ciaſcuna per 3, i quozienti ſaranno 16, 12, 9, 6, 4, e però ſi avrà

$$48 : 36 : 27 : 18 : 12$$
$$16 : 12 : 9 : 6 : 4$$

476. Corol. 2. E però per avere i minimi termini di una data ragione, baſterà dividere l' antecedente, e il conſeguente di tale ragione pel loro maſſimo comun diviſore, come quello, che miſura tale antecedente, e conſeguente coi loro minimi ter-

termini, ſiccome *vice verſa* l' antecedente, e il conſeguente ſono miſurati col loro maſſimo comun diviſore dai minimi termini.

477. Corol. 3. Per lo che ſe ſaranno date quattro ragioni, delle quali le due prime abbiano lo ſteſſo conſeguente, come pure le due ultime, e in oltre i quattro loro antecedenti ſiano in proporzione geometrica, queſte quattro ragioni ſaranno geometricamente proporzionali.

478. Corol. 4. E *vice verſa* ſe quattro ragioni ſaranno geometricamente proporzionali, e le due prime abbiano uno ſteſſo conſeguente, e iſteſſamente lo abbiano le due ultime, i loro quattro antecedenti ſaranno in proporzione.

479. Corol. 5. Ogniqualvolta poi quattro ragioni ſiano proporzionali ad altre quattro, e i conſeguenti delle prime ſiano gli ſteſſi, che gli antecedenti delle ſeconde, ſe gli antecedenti delle prime ſaranno proporzionali, lo ſaranno ancora i conſeguenti delle ſeconde: E ſe ognuna di queſte due proporzioni avrà lo ſteſſo antecedente, eſſendo proporzionali i conſeguenti della prima, lo ſaranno pure i conſeguenti della ſeconda.

480. Corol. 6. Dai num. 466, e 473 intendeſi, che ſe ſaranno date quattro ragioni proporzionali, e l' antecedente delle due prime, come pure il conſeguente delle due ultime, ſia lo ſteſſo, ſtarà il conſeguente della ſeconda al conſeguente della prima, come l' antecedente della terza all' antecedente della quarta; e *vice verſa* ſe ſaranno date quattro ragioni, le due prime delle quali avendo lo ſteſſo antecedente, e le due ultime il medeſimo conſeguente, ſtia il conſeguente della ſeconda al conſeguente della prima, come l' antecedente della terza all' antecedente della quarta, tali ragioni ſaranno geometricamente proporzionali: Per Eſempio eſſendo $\frac{24}{3} : \frac{24}{12} :: \frac{32}{4} : \frac{8}{4}$, ſarà $12 : 3 :: 32 : 8$

Lo ſteſſo a proporzione dicaſi ſe le due prime aveſſero lo ſteſſo conſeguente, e le due ultime lo ſteſſo antecedente.

481. Teor. 3. Se ſaranno date tre quantità, delle quali le due prime ſiano omogenee, come ſtarà la prima alla ſeconda. così ſtarà la ragione della prima alla ſeconda alla ragione della terza alla ſteſſa terza: Per Eſempio eſſendo le tre quantità 15, 9, 5, ſarà $\frac{15}{9} : \frac{5}{5} :: 15 : 9$

482. Dim. Poichè la ragione della terza alla terza viene eſpreſſa dall' unità (pel num. 424.), ſtarà la ragione della prima alla ſeconda alla ragione della terza alla terza, come l' eſponente della prima ragione ſta all' unità: Ma nella prima ragione ſta la prima alla ſeconda (pel num. 417.), come l' eſponente all' unità; dunque delle tre date quantità ſta la prima alla ſeconda, come la ragione della prima alla ſeconda alla ragione della terza alla terza. Lo che ſi doveva dimoſtrare.

483. Corol. Quindi ſe ſaranno date due ragioni, delle quali la prima ſtia alla ſeconda, come l' antecedente della prima ſta al ſuo conſeguente, la ſeconda ragione ſarà ragione d' egualità.

484. Teor. 4. Se due ragioni ſaranno egualmente maggiori, o egualmente minori di una terza ragione, eſſe ſaranno eguali fra loro: Così pure ſe ſaranno ad eſſi eguali. Eucl. lib. 5. prop. 11.

485. Dim. Eſſendo che le due date ragioni ſono egualmente maggiori, o egualmente minori della detta terza ragione, gli eſponenti delle due ragioni hanno egual ragione all' eſponente della terza (pel num. 441.); dunque (pel num. 433.) gli eſpo-

esponenti di queste due ragioni sono eguali, e conseguentemente (pel num. 433.) queste due ragioni sono eguali. Lo che si doveva dimostrare.

486. Corol. Per la qual cosa se due ragioni non saranno eguali ad una terza ragione, o non saranno di lei egualmente maggiori, o egualmente minori, esse saranno ineguali fra loro.

487. Quello, che si è detto di due ragioni rispetto ad una terza vale ancora rispetto a due altre ragioni eguali; e però quelle ragioni, che rispetto ad una di due ragioni eguali sono o eguali, o egualmente maggiori, o egualmente minori, lo sono ancora rispetto all' altra.

488. Teor. 5. Se saranno date quattro quantità in proporzione geometrica discreta, sarà il prodotto delle estreme eguale al prodotto delle medie.

489. Dim. Gli antecedenti (supposte le ragioni di maggiore inegualità) di queste due ragioni non sono altro (pel num. 416.), che il prodotto del loro conseguente nel denominatore; e però il prodotto delle estreme, cioè dell' antecedente della prima ragione, e del conseguente della seconda, non è altro, che il prodotto dell' esponente, e del conseguente della prima ragione, e del conseguente della seconda: Parimente il prodotto delle medie, cioè del conseguente della prima ragione, e dell' antecedente della seconda, non è altro, che il prodotto dell'esponente, del conseguente della seconda ragione, e del conseguente della prima: Ma (per Ipotesi) queste quattro quantità essendo in proporzione, l' esponente della prima ragione è eguale all' esponente della seconda (pel num. 448.); quindi gli elementi di questi due prodotti sono gli stessi, e però tali prodotti sono eguali. Lo stesso discorso proporzionatamente si applichi, se le due ragioni sono di minore inegualità: E questo è quanto si doveva provare. Questi due prodotti poi chiamansi piani reciprochi.

ESEMPIO.

490. Un Uomo con una forza determinata può gettare un Sasso, che pesa 10 libbre lontano 60 piedi, e però un Sasso, che pesi 15 libbre non lo potrà gettare lontano, che 40 piedi, perchè come sta il Sasso di 15 libbre al Sasso di 10, così stà la distanza 60 alla distanza 40, cioè $15 : 10 :: 60 : 40$, onde moltiplicando gli estremi, e i medj si ha $15 \times 40 = 10 \times 60 = 600$, che sono le due quantità di moto eguali.

491. Corol. 1. Qualora pertanto date quattro quantità il prodotto di due sarà eguale al prodotto dell' altre due, queste quattro quantità saranno geometricamente proporzionali, con prendere per estremi i fattori di un prodotto, e per medj i fattori dell' altro.

492. Corol. 2. Poichè tre quantità in proporzione continua, come 18, 6, 2 si rappresentano anche così $18 : 6 :: 6 : 2$, sarà il prodotto delle estreme eguale al prodotto di quella di mezzo moltiplicata in se stessa, cioè $18 \times 2 = 6 \times 6 = 36$

493. Corol. 3. Quindi essendo date due quantità si avrà la terza in proporzione continua con moltiplicare la seconda in se stessa, indi dividere il prodotto per la prima, mentre il quoziente darà la terza cercata. Collo stesso metodo si potrà proseguire la proporzione continua.

494. Corol. 4. Che se saranno date tre quantità in proporzione geometrica discreta, si avrà la quarta, a cui starà la terza in ragione della prima alla seconda, con prendere il quoziente, che nasce dal dividersi per la prima il prodotto della seconda nella terza. E questa è la regola del Tre, di cui parleremo più abbasso.

495.

495. Corol. 5. Da ciò dipende la moltiplicazione, e la divisione, perchè nella moltiplicazione si cerca un quarto termine, che è il prodotto, a cui stia un fattore, come l'unità sta all'altro fattore; e nella divisione si cerca un quarto termine, che è il quoziente, a cui stia l'unità, come sta il divisore al dividendo, o pure a cui stia il dividendo, come sta il divisore all'unità: E perchè la frazione non altro esprime, che un quoziente (pel num. 214.), starà l'unità alla frazione, come il denominatore della stessa frazione al numeratore. Onde nella moltiplicazione l'unità, e il moltiplicando, così il moltiplicante, e il prodotto devono essere quantità omogenee: istessamente nella divisione lo devono essere il dividendo, e il quoziente, così il divisore, e l'unità. In oltre nella moltiplicazione avendosi un prodotto A risultato dalla moltiplicazione di due quantità B, C omogenee, se sarà B maggiore, o minore di A, sarà C minore, o rispettivamente maggiore dell'unità: Ed essendo il prodotto A maggiore, o minore dell'unità, se sarà uno de' fattori, come B maggiore, o rispettivamente minore di A, l'altro C sarà minore, o rispettivamente maggiore di B. Lo che si è osservato al num. 285. Il medesimo discorso si applichi alla divisione, come abbiamo notato al num. 296.

496. Corol. 6. Ogniqualvolta di quattro quantità in proporzione geometrica saranno date le tre ultime, con dividere il prodotto delle medie per la quarta, il quoziente darà la prima: Che se si dividerà il prodotto delle estreme per la seconda, il quoziente darà la terza: O pure dividendo il prodotto delle estreme per la terza, il quoziente darà la seconda.

497. Prima di passare avanti voglio osservare una cosa per altro per se stessa evidente, cioè che qualora si paragona una ragione ad un'altra, se la prima è maggiore della seconda, come $9:3 > 4:2$, sarà trasponendo $4:2 < 9:3$, perchè quella, che è maggiore resta sempre maggiore, restando tuttavia lo stesso il rapporto di ciascun antecedente al suo conseguente: Istessamente essendo la prima minore della seconda, come $6:2 < 12:3$, sarà trasponendo $12:3 > 6:2$.

498. Teor. 6. Se due, o più quantità si moltiplicheranno per una stessa quantità, i prodotti saranno egualmente moltiplici delle quantità moltiplicate: Per Esempio moltiplicandosi 2, 4 per 3, i di cui prodotti sono 6, 12, sarà $6:2::12:4$.

499. Dim. Il prodotto (pel num. 102.) contiene tante volte il moltiplicando, quante volte il moltiplicante contiene l'unità. Ma così è, che rispetto all'uno, e all'altro prodotto il moltiplicante (per ipotesi) è lo stesso; dunque l'uno, e l'altro prodotto deve contenere egual numero di volte il moltiplicando, o sia essere del medesimo egualmente moltiplice. Lo che si doveva dimostrare.

500. Teor. 7. Se due, o più quantità si divideranno per una stessa quantità, i quozienti saranno egualmente submoltiplici delle quantità divise: per esempio dividendosi 24, 18 per 6, i di cui quozienti sono 4, 3, sarà $24:4::18:3$.

501. Dim. Il dividendo (pel num. 128.) contiene tante volte il quoziente, quante volte il divisore contiene l'unità: Ma (per ipotesi) nell'una, e nell'altra divisione il divisore è lo stesso; dunque l'uno, e l'altro dividendo conterrà egual numero di volte il suo quoziente; o sia i quozienti saranno egualmente submoltiplici de' dividendi. Lo che si doveva dimostrare.

502. Corol. 1. I quozienti poi, che nascono dal dividersi due, o più quantità per una qualunque quantità, saranno (pel num. 388.) simili parti aliquote delle dette quantità, o (pel num. 387.) simili parti aliquante; e però le parti simili hanno la stessa ragione ai loro tutti.

503. Corol. 2. Conseguentemente se alcuni tutti avranno la stessa ragione alle loro parti, tali parti saranno simili.

504

504. Corol. 3. Essendo i tutti 24, 18, e le parti 4, 3, sarà (pel num. 475.) 24 : 18 : : 4 : 3, onde le parti simili hanno fra loro la stessa ragione, che hanno i suoi tutti. Euclide lib. 5. prop. 15. E perchè levandosi parti simili da due tutti, le rimanenti sono pure parti simili, staranno egualmente fra loro i due tutti, come queste rimanenti parti. Euclide lib. 5. prop. 19. Per lo che se un tutto sarà moltiplice di un'altro tutto, come una parte del primo tutto è moltiplice di una parte del secondo, sarà pure la rimanente parte del primo tutto moltiplice della rimanente parte del secondo, come lo è il primo tutto del secondo. Euclide lib. 5. prop. 5. Per uniformità di raziocinio se due quantità saranno egualmente moltiplici di due altre quantità, delle quali alcune parti delle due prime quantità siano pure egualmente moltiplici, le rimanenti parti delle due prime quantità saranno ancora egualmente moltiplici, o pure eguali all'altre due dette quantità. Euclide lib. 5. prop. 6.

505. Corol. 4. Per lo che se ciascuna delle parti di un tutto sarà eguale, o maggiore, o minore di ciascuna delle parti simili di un'altro tutto, anche il primo tutto sarà eguale, ovvero rispettivamente maggiore, o minore del secondo tutto. E *vice versa* se un tutto è uguale, o maggiore, o minore di un'altro tutto, anche ciascuna delle parti simili del primo sarà uguale, ovvero rispettivamente maggiore, o minore di ciascuna delle parti simili del secondo. E perchè i tutti sono egualmente moltiplici delle loro parti simili, se a quattro quantità proporzionali se ne prenderanno altre quattro egualmente moltiplici ciascuna a ciascuna, queste quattro quantità prese saranno pure proporzionali. Euclide lib. 5. p. 4.

506. Corol. 5. E se due, o più tutti avranno molte parti simili, questi tutti avranno fra loro la stessa ragione, che hanno i prodotti di egual numero di parti simili, perchè questi prodotti risultando da parti simili, sono essi pure parti simili de' proposti tutti.

507. Teor. 8. Quattro quantità in proporzione geometrica rimarranno sempre proporzionali comunque si mutino riguardo al posto, purchè tanto le estreme, che le medie rimangano sempre o estreme, o medie.

508. Dim. I cambiamenti, che permette la proposta condizione, consistono in paragonare gli antecedenti ai conseguenti, o i conseguenti agli antecedenti, o pure gli antecedenti agli antecedenti, e i conseguenti ai conseguenti; ma non si turba la proporzione con paragonare gli antecedenti ai conseguenti, o i conseguenti agli antecedenti, perchè tanto nel primo, che nel secondo caso le due ragioni hanno uno stesso denominatore; e nemmeno si turba la proporzione con paragonare gli antecedenti agli antecedenti, e i conseguenti ai conseguenti, perchè i conseguenti sono parti simili degli antecedenti, o *vice versa*, in quanto che (pel num. 416.) con dividersi uno per l'esponente nasce l'altro; e (pel num. 504.) le parti simili hanno fra loro la stessa ragione, che hanno i tutti: dunque quattro quantità in proporzione geometrica resteranno sempre proporzionali comunque si cambino rispetto al posto ec. Lo che si doveva dimostrare.

509. Si prendano per esempio le quattro quantità del num. 490., esse saranno proporzionali in tutti i seguenti modi.

1.	60 : 40 :: 15 : 10	
2.	10 : 40 :: 15 : 60	
3.	60 : 15 :: 40 : 10	Euclide lib. 5. prop. 16.
4.	10 : 15 :: 40 : 60	
5.	40 : 10 :: 60 : 15	
6.	15 : 10 :: 60 : 40	
7.	40 : 60 :: 10 : 15	
8.	15 : 60 :: 10 : 40	

510. Il fecondo, il terzo, il quinto, e l'ottavo modo efiggono, che tutte quattro le quantità fiano omogenee.

511. Def. 9. Il fettimo modo, in cui fi cambiano i confeguenti in antecedenti, fi chiama argomentare invertendo. Il terzo modo fi chiama ragione alterna.

512. Corol. 1. Per la fteffa ragione del num. 508. effendo $12:4>6:3$, farà pure $12:6>4:3$. Euclide lib. 5. prop. 27.

513. Corol. 2. Effendofi trovato al num. 498. $3\times2:2::3\times4:4$, cioè $6:2::12:4$, farà pel terzo modo $6:12::2:4$; e però fe una qualunque quantità moltiplicherà quante quantità fi vogliono, i prodotti, che ne verranno prefi ordinatamente avranno fra loro le fteffe ragioni, che hanno tra fe le quantità moltiplicate.

514. Corol. 3. Dal precedente Corol. ne fegue, che fe di una data ragione l'antecedente, e il confeguente fi moltiplicherà fucceffivamente per quante quantità fi vogliono, tutte quefte ragioni faranno eguali: come moltiplicandofi per 3, per 5, per 8 ec. l'antecedente, e il confeguente della ragione $8:6$, fi avrà $\frac{8}{6}=\frac{24}{18}=\frac{40}{30}=\frac{64}{48}$ ec.

515. Corol. 4. Dallo fteffo Corol. ricavafi pure, che fe faranno date tre quantità, come 3, 5, 9, ftarà la prima alla terza, come il prodotto della prima nella feconda al prodotto della feconda nella terza, cioè $3:9::3\times5:5\times9$; o pure la prima alla feconda, come il prodotto della prima nella terza al prodotto della feconda nella terza; ovvero la feconda alla terza, come il prodotto della feconda nella prima al prodotto della terza nella prima.

516. Corol. 5. Mediante il num. 509. s'intende, che effendo proporzionali tanto $60:40::15:10$, come $60:15::40:10$, farà $\frac{60}{40}:\frac{15}{10}::\frac{60}{15}:\frac{40}{10}$; e $\frac{60}{40}:\frac{15}{10}::\frac{10}{40}:\frac{15}{60}$ perchè pel fecondo modo è $10:40::15:60$ ec. e lo fteffo fi dica rifpetto agli altri modi.

517. Corol. 6. Ifteffamente effendo date due proporzioni $8:2::12:3$, e $10:5::2:1$, perchè i termini tanto dell'una, come dell'altra fi poffono cambiare negli otto modi detti al num. 509. così

$8 : 2 :: 12 : 3$	$10 : 5 :: 2 : 1$
$3 : 2 :: 12 : 8$	$1 : 5 :: 2 : 10$
$8 : 12 :: 2 : 3$	$10 : 2 :: 5 : 1$
$3 : 12 :: 2 : 8$	$1 : 2 :: 5 : 10$
$2 : 3 :: 8 : 12$	$5 : 1 :: 10 : 2$
$12 : 3 :: 8 : 2$	$2 : 1 :: 10 : 5$
$2 : 8 :: 3 : 12$	$5 : 10 :: 1 : 2$
$12 : 8 :: 3 : 2$	$2 : 10 :: 1 : 5$

però le ragioni delle due date proporzioni si potranno paragonare ne' seguenti modi

1. $\frac{8}{2} : \frac{12}{3} :: \frac{10}{5} : \frac{2}{1}$
2. $\frac{8}{2} : \frac{12}{3} :: \frac{1}{5} : \frac{2}{10}$
3. $\frac{8}{2} : \frac{12}{3} :: \frac{10}{2} : \frac{5}{1}$
4. $\frac{8}{2} : \frac{12}{3} :: \frac{1}{2} : \frac{5}{10}$
5. $\frac{8}{2} : \frac{12}{3} :: \frac{5}{1} : \frac{10}{2}$
6. $\frac{8}{2} : \frac{12}{3} :: \frac{2}{1} : \frac{10}{5}$
7. $\frac{8}{2} : \frac{12}{3} :: \frac{5}{10} : \frac{1}{2}$
8. $\frac{8}{2} : \frac{12}{3} :: \frac{2}{10} : \frac{1}{5}$
9. $\frac{10}{5} : \frac{2}{1} :: \frac{3}{2} : \frac{12}{8}$
10. $\frac{10}{5} : \frac{2}{1} :: \frac{8}{12} : \frac{2}{3}$
11. $\frac{10}{5} : \frac{2}{1} :: \frac{3}{12} : \frac{2}{8}$
12. $\frac{10}{5} : \frac{2}{1} :: \frac{2}{3} : \frac{8}{12}$
13. $\frac{10}{5} : \frac{2}{1} :: \frac{12}{3} : \frac{8}{2}$
14. $\frac{10}{5} : \frac{2}{1} :: \frac{2}{8} : \frac{3}{12}$
15. $\frac{10}{5} : \frac{2}{1} :: \frac{12}{8} : \frac{3}{2}$
16. $\frac{3}{2} : \frac{12}{8} :: \frac{1}{5} : \frac{2}{10}$ ec.

e nello stesso modo si continuino tutti gli altri paragoni.

518. Teor. 9. Se la prima di quattro quantità avrà maggior ragione alla seconda, che la terza alla quarta, in ragione inversa la seconda alla prima avrà minor ragione, che la quarta alla terza: E *vice versa*. Per Esempio essendo $12 : 4 > 6 : 3$, sarà $4 : 12 < 3 : 6$; ed essendo $6 : 4 < 9 : 3$ sarà $4 : 6 > 3 : 9$. Euclide lib. 5. prop. 26.

519. Dim. La prima quantità (per Ipoteſi) contiene più volte la ſeconda, che la terza contenga la quarta; dunque la ſeconda contiene meno parti della prima, che la quarta della terza, e però la ſeconda ha minor ragione alla prima, che la quarta alla terza. Lo che ſi doveva dimoſtrare. Con pari diſcorſo ſi dimoſtra la ſeconda parte.

520. Teor. 10. Date quattro quantità proporzionali non ſi turba la proporzione con accreſcere, o diminuire gli antecedenti di quantità proporzionali ai conſeguenti; o pure di accreſcere, o diminuire i conſeguenti di quantità proporzionali agli antecedenti.

521. Dim. Coll'accreſcere, o diminuire nel modo detto gli antecedenti, o i conſeguenti, ſi viene ad accreſcere, o diminuire egualmente la ragione di un termine all'altro; dunque i nuovi denominatori riſultano eguali, e però non ſi turba la proporzione. Lo che ſi doveva dimoſtrare.

522. Corol. 1. Quindi le propoſte quattro quantità (al num. 460.) 60 : 40 :: 15 : 10 ſaranno ancora proporzionali così 60 + 40 : 40 :: 15 + 10 : 10. E queſto modo di argomentare ſi chiama componendo; o ſia argomentare per compoſizione di ragione. Euclide lib. 5. prop. 18. Parimente eſſendo 12 : 4 > 6 : 3, ſarà pure 12 + 4 : 4 > 6 + 3 : 3. Euclide lib. 5. prop. 28.

523. Corol. 2. Dal che s'intende, che ſe ſaranno date due ſerie di termini nella ſteſſa ragione, la prima delle quali coſti di tre termini, come 18, 12, 8; e la ſeconda di due, come 6, 4, tanto il prodotto nato dal moltiplicarſi la ſomma dei due primi termini 18, 12 della prima ſerie nel ſecondo termine 4 della ſeconda, quanto il prodotto nato dal moltiplicarſi la ſomma dei due ultimi termini 12, 8 della prima ſerie nel primo 6 della ſeconda, ſaranno eguali, cioè $\overline{18+12}\times 4 = \overline{12+8}\times 6$; poichè eſſendo 18 : 12 :: 12 : 8 :: 6 : 4, ſarà 18 + 12 : 12 :: 12 + 8 : 8, cioè 18 + 12 : 12 + 8 :: 12 : 8 :: 6 : 4; dunque (pel num. 488.) $\overline{18+12}\times 4 = \overline{12+8}\times 6$.

524. Corol. 3. Saranno pure proporzionali le ſopraddette quattro quantità in queſto modo 60 − 40 : 40 :: 15 − 10 : 10. E queſto modo di argomentare diceſi dividendo, o ſia per diviſione di ragione. Euclide lib. 5. prop. 17. Iſteſſamente eſſendo 12 : 4 > 6 : 3, ſarà pure 12 − 4 : 4 > 6 − 3 : 3. Euclide lib. 5. prop. 29.

525. Corol. 4. Per lo che eſſendo tanto 60 + 40 : 40 :: 15 + 10 : 10, o ſia (pel num. 509. modo 3.) 60 + 40 : 15 + 10 :: 40 : 10, come 60 − 40 : 40 :: 15 − 10 : 10, cioè (per lo ſteſſo num.) 60 − 40 : 15 − 10 :: 40 : 10, ſarà (pel num. 465.) 60 + 40 : 15 + 10 :: 60 − 40 : 15 − 10; e 60 + 40 : 60 − 40 :: 15 + 10 : 15 − 10.

526. Corol. 5. Iſteſſamente le dette quattro quantità ſaranno proporzionali così 60 + 40 : 60 :: 15 + 10 : 15. Queſto modo d'argomentare ſi chiama per compoſizione converſa di ragione.

527. Corol. 6. O pure ſi potrà argomentare così 60 : 60 + 40 :: 15 : 15 + 10, che chiamaſi convertendo.

528. Corol. 7. Parimente ſaranno proporzionali così 40 : 60 − 40 :: 10 : 15 − 10, il qual modo di argomentare ſi chiama diviſione converſa di ragione.

529. Corol. 8. Perſiſterà pure la proporzionalità facendo 60 − 40 : 60 :: 15 − 10 : 15 : onde giuſta il num. 504. dai tutti 24, 18, e dalle parti 4, 3 avendoſi 24 : 18 :: 4 : 3, e 24 : 4 :: 18 : 3, ſarà 24 − 4 : 24 :: 18 − 3 : 18, e pe-

e però $24 : 18 :: 24 - 4 : 18 - 3$, o pure $4 : 3 :: 24 - 4 : 18 - 3$, cioè come stanno fra loro i tutti, ovvero le loro parti simili, egualmente staranno fra loro le altre parti, che rimangono a compire i tutti, come si è detto al num. 504.

530. Corol. 9. Proporzionali non meno saranno così $60 : 60 - 40 :: 15 : 15 - 10$. O pure essendo $100 : 40 > 27 : 12$, sarà (pel num. 524.) $100 - 40 : 40 > 27 - 12 : 12$; e (pel num. 518) $40 : 100 - 40 < 12 : 27 - 12$, e finalmente (pel num. 522.) $40 + 100 - 40 : 100 - 40 < 12 + 27 - 12 : 27 - 12$, cioè $100 : 100 - 40 < 27 : 27 - 12$. Euclide lib. 5. prop. 30.

531. Corol. 10. Come pure in questo modo $60 : 40 :: 60 - 15 : 40 - 10 :: 15\ 10$, il qual modo d' argomentare suppone, che l'antecedente della prima ragione sia maggiore dell' antecedente della seconda; così il conseguente della prima maggiore del conseguente della seconda.

532. Corol. 11. Egualmente pure saranno proporzionali così $40 : 60 - 40 :: 10 : 15 - 10$.

533. Corol. 12. Quindi se saranno date due serie di quantità, delle quali stia la prima alla seconda nella prima serie, come la prima alla seconda nella seconda serie; e come la terza alla seconda nella prima serie, così la terza alla seconda nella seconda serie; starà pure nella prima serie la prima sommata colla terza alla seconda, come la prima sommata colla terza alla seconda nella seconda serie. Lo che è lo stesso, che dire: se saranno date sei quantità, delle quali stia la prima alla seconda, come la terza alla quarta, e la quinta alla seconda, come la sesta alla quarta, starà la prima più la quinta alla seconda, come la terza più la sesta alla quarta. Euclide lib. 5. prop. 24.

534. Teor. 11. Se ciascuno di quattro termini in proporzione si moltiplicherà, ovvero si dividerà per ciascuno di altri quattro termini pure in proporzione qualunque ella sia, i quattro termini, che ne risulteranno tanto nel primo, che nel secondo caso saranno in proporzione. Per esempio essendo $16 : 3 :: 48 : 9$; e $4 : 2 :: 10 : 5$, sarà tanto

$$16 \times 4 : 3 \times 2 :: 48 \times 10 : 9 \times 5, \text{ come } \frac{16}{4} : \frac{3}{2} :: \frac{48}{10} . \frac{9}{5}$$

535. Dim. Mediante tale moltiplicazione, o divisione non si fa altro, che moltiplicare il denominatore della prima proporzione, o dividerlo pel denominatore della seconda; onde i nuovi quattro termini avranno per denominatore, o il prodotto, o il quoziente dei denominatori delle due proposte proporzioni; e però essendo lo stesso il denominatore di questi nuovi quattro termini, essi saranno in proporzione (pel num: 448.) Lo che si doveva dimostrare.

536. Corol. 1. Quindi perchè quattro quantità sono in proporzione allora quando il denominatore della prima ragione è eguale al denominatore della seconda (pel num. 448.); però se saranno date quattro quantità in proporzione, indi si prenda una ragione qualunque, e col suo antecedente si moltiplichino gli antecedenti, e col conseguente i conseguenti delle quattro date quantità, esse resteranno tuttavia in proporzione: Per Esempio avendosi $21 : 3 :: 28 . 4$, e in oltre la ragione $3 : 2$, sarà $21 \times 3 : 3 \times 2 :: 28 \times 3 : 4 \times 2$

537. Corol. 2. Egualmente se di una data proporzione si moltiplicheranno gli antecedenti, o pure i conseguenti per una stessa quantità, la proporzione sussisterà tuttavia.

538. Corol. 3. Per la stessa ragione avendosi quattro ragioni in proporzione co-

come $\frac{24}{6} : \frac{10}{5} :: \frac{8}{2} : \frac{6}{3}$, se si prenderà un' altra ragione qualunque, per Esempio 7 : 2, se con questa ragione si moltiplicheranno o le ragioni, che fanno da antecedenti, o le ragioni, che fanno da conseguenti nella data proporzione, la proporzione sussisterà: Così $\frac{24}{6} \times \frac{7}{4} . \frac{10}{5} :: \frac{8}{2} \times \frac{7}{4} : \frac{6}{3}$ ovvero $\frac{24}{6} : \frac{10}{5} \times \frac{7}{4} :: \frac{8}{2} : \frac{6}{3} \times \frac{7}{4}$

539. Corol. 4. Quindi quattro quantità proporzionali sussisteranno tuttavia in proporzione se moltiplicandosi un' antecedente di una delle due ragioni per una qualunque quantità, colla stessa quantità si dividerà il conseguente dell' altra ragione; o pure colla detta quantità moltiplicandosi il conseguente di una, si dividerà l'antecedente dell' altra: Per Esempio essendo 8: 2 :: 36: 9, e si prenda una qualunque quantità 3, sarà tanto $3 \times 8 : 2 :: 36 : \frac{9}{3}$, cioè 24: 2 :: 36: 3; quanto $8 : 2 \times 3 :: \frac{36}{3} : 9$, cioè 8 : 6 :: 12: 9. (giusta il num. 414)

540. Corol. 5. Onde essendo evidente (pel num. 504.) che in una proporzione le parti simili si possono sostituire in luogo de' loro tutti, se data una proporzione qualunque, si vorrà sostituire in luogo di un' antecedente una sua parte, lo che fare non si possa in luogo dell' altro antecedente omologo, stante che egli non abbia una simile parte intera, bisognerà in tal caso moltiplicare il conseguente di quest' altra ragione per quella quantità, con cui diviso il detto antecedente ne risultò la sostituita parte: Che se tale parte si fosse sostituita in luogo di un conseguente, ciò si faccia rispetto all' antecedente dell' altra ragione: Come avendosi la proporzione 36: 9 :: 8: 2, e in luogo del primo antecedente 36 volendosi sostituire il 18, che è una sua parte nata dal dividerlo per 2, si farà $\frac{36}{2} : 9 :: 8 : 2 \times 2$

Così essendo 4 : 12 :: 3 : 9, sarà pure $4 : \frac{12}{6} :: 3 \times 6 : 9$, cioè 4 : 2 :: 18: 9.

O pure avendosi $4 : 6 :: 3 \times 2 : 9$, sarà $4 : 6 \times 3 :: 2 : 9$. Parimente essendo $8 : 4 :: 6 \times 6 : 3 \times 6$, sarà $8 \times 6 : 4 :: 6 \times 6 . 3$; e $8 : 4 \times 6 :: 6 : 3 \times 6$.

541. Teor. 12. Se si avranno tre quantità, come 12, 6, 3 proporzionali ad altre tre 8, 4, 2, le differenze delle prime saranno proporzionali alle differenze delle seconde, cioè $12 - 6 : 6 - 3 :: 8 - 4 : 4 - 2$. Le quantità date devono essere in proporzione continua.

542. Dim. Essendo per Ipotesi 12 : 8 :: 6: 4, e 6: 4 :: 3 : 2, sarà (pel num. 509. modo 3.) 12: 6 :: 8: 4, e 6: 3 :: 4: 2, e (pel num. 529.) $12 - 6 : 12 :: 8 - 4 : 8$, cioè $12 - 6 : 8 - 4 :: 12 : 8$; e $6 - 3 : 6 :: 4 - 2 : 4$, cioè $6 - 3 : 4 - 2 :: 6 : 4$; conseguentemente essendo 12: 8 :: 6: 4, sarà $12 - 6 : 8 - 4 :: 6 - 3 : 4 - 2$, e $12 - 6 : 6 - 3 :: 8 - 4 : 4 - 2$. Lo che si doveva dimostrare.

543. Corol. Se pertanto tre date quantità ineguali si moltiplicheranno, o si divideranno per una stessa quantità, le differenze de' prodotti nel primo caso, e le differenze de' quozienti nel secondo, staranno fra loro, come le differenze delle proposte quantità.

544. Teor. 13. Se saranno date quattro quantità, delle quali la prima alla seconda abbia maggior ragione, che la terza alla quarta, il prodotto delle estreme sarà maggiore del prodotto delle medie; e *vice versa*.

545. La Dim. costa dal num. 489., mentre il prodotto delle estreme risultando dal denominatore della prima ragione, dal conseguente della stessa prima ragione, e dal

e dal conseguente della seconda; ed il prodotto delle medie risultando dal denominatore, dal conseguente della seconda ragione, e dal conseguente della prima; e degli elementi di questi due prodotti due essendo gli stessi nell'uno, e nell' altro, cioè i conseguenti di ambe le ragioni, ma l'esponente della prima ragione, che entra nel prodotto degli estremi, essendo maggiore dell'esponente della seconda, che entra nel prodotto de'medj, conseguentemente il prodotto degli estremi deve essere maggiore del prodotto de' medj. Lo che si doveva dimostrare. Lo stesso discorso si applichi in caso, che la ragione della prima quantità alla seconda sia minore della ragione della terza alla quarta, nel qual caso il prodotto delle estreme è minore del prodotto delle medie.

546. Corol. Dati essendo adunque due prodotti ineguali, se si disporranno i loro lati in modo, che i due lati, o fattori del prodotto maggiore occupino i luoghi estremi, e i lati del prodotto minore occupino i luoghi medj, il primo al secondo avrà maggior ragione, che il terzo al quarto: Se poi si collocheranno ne' luoghi estremi i lati del prodotto minore, e ne' luoghi medj i lati del prodotto maggiore, il primo al secondo avrà minor ragione, che il terzo al quarto.

547. Teor. 14. Da ciascuno di due tutti dati, come 12, 3, levandosi una parte, per Esempio 6 dal 12, e 2 dal 3, se sarà maggiore la ragione del tutto al tutto, come in questo Esempio, che della parte levata alla parte levata, avrà il residuo al residuo maggior ragione, che il tutto al tutto, cioè sarà $6:1>12:3$. E *vice versa*. Euclide lib. 5. p. 33.

548. Dim. Essendo (per Ipotesi) $12:3>6:2$, sarà $12:6>3:2$ (pel num. 512.); e però $12:12-6<3:3-2$, e finalmente $12:3<12-6:3-2$. Lo che si doveva dimostrare. Il medesimo discorso si applichi alla seconda parte.

549. Teor. 15. Essendo date quante quantità si vogliono in proporzione continua come starà un'antecedente al suo conseguente, nella stessa ragione starà la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutti i conseguenti. Per Esempio essendo 2, 4, 8, 16, 32, 64, sarà $2:4::2+4+8+16+32:4+8+16+32+64$. Euclide lib 5. prop. 12.

550. Dim. Poichè le quantità date sono in proporzione geometrica continua, ciascuna sta all' altra nella stessa ragione, però ogni antecedente egualmente contiene, o è contenuto nel suo conseguente; quindi perchè sommando insieme tutti gli antecedenti, poscia tutti i conseguenti si fa lo stesso, che accrescere proporzionalmente il primo antecedente, e il primo conseguente, dunque la somma di tutti gli antecedenti starà alla somma di tutti i conseguenti (pel num. 520.) come il primo antecedente al primo conseguente; o sia, perchè tutti stanno nella stessa ragione, come un qualunque antecedente al suo conseguente. Lo che si doveva dimostrare.

551. O sia, se i termini sono ascendenti, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti, come l' unità al denominatore; o come il denominatore all' unità se i termini sono discendenti. (pel num. 417.)

552. Corol. 1. Quindi essendo date quante si vogliono ragioni eguali, come $4:2$, $10:5$, $16:8$, $6:3$, sarà la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutti i conseguenti, come l' antecedente di una qualunque delle date ragioni al suo conseguente, cioè $4+10+16+6:2+5+8+3::4:2$, o come $10:5$ ec., e perchè (per Ipotesi) $\frac{4}{2}=\frac{10}{5}$, sarà $\frac{4+10+16+6}{2+5+8+3}=\frac{4}{2}$ Euclide lib 5. prop. 1.

553. Corol. 2. Istessamente se saranno date due serie di ragioni, la prima

ma $\frac{6}{2}, \frac{12}{4}, \frac{24}{8}, \frac{48}{16}$; la seconda $\frac{9}{3}, \frac{18}{6}, \frac{36}{12}, \frac{72}{24}$, e sia $\frac{6}{2} = \frac{9}{3}$, e $\frac{12}{4} = \frac{18}{6}$ ec.;

ed in oltre $6 : 12 :: 9 : 18$; $12 : 24 :: 18 : 36$, sarà $\frac{6 + 12 + 24 + 48}{2 + 4 + 8 + 16} =$

$\frac{9 + 18 + 36 + 72}{3 + 6 + 12 + 24}$, poichè è $\frac{6 + 12 + 24 + 48}{2 + 4 + 8 + 16} = \frac{6}{2}$, e $\frac{9 + 18 + 36 + 72}{3 + 6 + 12 + 24} = \frac{9}{3}$;

ma (per Ipotesi) $\frac{6}{2} = \frac{9}{3}$; dunque $\frac{6 + 12 + 24 + 48}{2 + 4 + 8 + 16} = \frac{9 + 18 + 36 + 72}{3 + 6 + 12 + 24}$.

554. Corol. 3. Che se si avranno due serie di ragioni, ognuna delle quali abbia lo stesso conseguente, come $\frac{144}{3}, \frac{72}{3}, \frac{36}{3}, \frac{18}{3}$; e $\frac{96}{2}, \frac{48}{2}, \frac{24}{2}, \frac{12}{2}$, e sia rispettivamente ciascuna ragione della prima serie eguale (come nel proposto Esempio), o maggiore, o minore della corrispondente ragione nella seconda serie, sarà pure $\frac{144 + 72 + 36 + 18}{3 + 3 + 3 + 3}$ eguale, ovvero rispettivamente maggiore, o minore di $\frac{96 + 48 + 24 + 12}{2 + 2 + 2 + 2}$: Lo stesso si dica se le due serie avessero ciascuna l'antecedente delle ragioni eguale: Per esempio essendo $\frac{3}{144}, \frac{3}{72}, \frac{3}{36}, \frac{3}{18}$; e $\frac{2}{96}, \frac{2}{48}, \frac{2}{24}, \frac{2}{12}$, sarebbe $\frac{3 + 3 + 3 + 3}{144 + 72 + 36 + 18}$ eguale, o maggiore, o minore di $\frac{2 + 2 + 2 + 2}{96 + 48 + 24 + 12}$ secondo che lo fosse ciascuna ragione della prima serie di ciascuna della seconda.

555. Teor. 16. Se saranno date due serie di quantità proporzionali in modo, che come sta la prima alla seconda nella prima serie, stia la prima alla seconda nella seconda serie; e come sta la seconda alla terza nella prima serie, stia la seconda alla terza nella seconda serie ec., starà egualmente la prima alla terza nella prima serie, e la seconda alla quarta, come la prima alla terza, e la seconda alla quarta nella seconda serie. Euclide lib. 5. prop. 22.

556. Dim. Pel num. 455. dato il primo termine di una proporzione continua si ritrovano gli altri mediante la reiterata moltiplicazione, o divisione (secondo che la serie è ascendente, o discendente) del precedente termine pel denominatore; quindi la ragione di un termine all'altro risulta dalle ragioni de' termini intermedj, in quanto che il denominatore di questa nuova ragione è il prodotto, che nasce dal moltiplicarsi il denominatore comune nel numero delle ragioni intermedie; e però in ciascuna delle dette due serie la ragione della prima quantità alla terza risulterà dalle ragioni della prima alla seconda, e della seconda alla terza: Ma (per Ipotesi) le ragioni della prima alla seconda, e della seconda alla terza sono le stesse in queste due serie, dunque saranno ancora eguali le ragioni, che da loro risultano, e conseguentemente la ragione della prima alla terza nella prima serie sarà eguale alla ragione della prima alla terza nella seconda serie. Lo che vale ancora per la ragione della seconda alla quarta nella prima serie, e della seconda alla quarta nella seconda serie: Anzi generalmente la ragione, che avranno due termini comunque distanti nella prima serie, l'avranno pure altri due egualmente distanti nella seconda serie.

557. Def. 10. Questo chiamasi modo d'argomentare in proporzione d'egualità ordinata.

558. Corol. 1. Che però se nella prima serie la ragione della prima quantità alla seconda sarà maggiore della ragione, che ha la prima alla seconda nella seconda serie; e parimente nella prima serie la ragione della seconda alla terza sia maggiore della ragione della seconda alla terza nella seconda serie; sarà pure nella prima serie maggiore la ragione della prima alla terza, che della prima alla terza nella seconda serie. Euclide lib. 5. prop. 31.

559. Corol. 2. Egualmente se nella prima serie la prima quantità avrà maggior ragione alla seconda, che la prima alla seconda nella seconda serie; e se la seconda alla terza nella prima serie avrà egual ragione, che la seconda alla terza nella seconda serie; la prima alla terza nella prima serie avrà maggior ragione, che la prima alla terza nella seconda serie.

560. Lo che si è detto della ragion maggiore vale ancora della minore.

561. Corol. 3. Per la stessa ragione del num. 556. se saranno date due serie di quantità, la prima delle quali nella prima serie stia alla seconda, come la prima alla seconda nella seconda serie; e come la seconda alla terza nella prima serie, così un' altra qualunque quantità alla prima della seconda serie; sarà parimente nella prima serie la prima alla terza, come l'altra quantità presa sta alla seconda della seconda serie: come essendo 10, 5, 20 nella prima serie, e 16, 8 nella seconda, stia 10 : 5 :: 16 : 8; e 5 : 20, come un'altra quantità qualunque per esempio 4, alla prima della seconda serie, che è 16, e però 5 : 20 :: 4 : 16, starà pure 10 : 20 :: 4 : 8; mentre le due date serie, con mutare il posto ai termini della prima sono 20, 5, 10, e della seconda 4, 16, 8, che sono nella stessa proporzione del num. 555., e però (giusta lo stesso numero) 10 : 20 :: 4 : 8. Euclide lib. 5. prop. 23. Questa dicesi proporzione egualmente perturbata.

562. Corol. 4. Per lo che se nella prima serie la prima avrà maggior ragione alla seconda, che la prima alla seconda nella seconda serie, e nella stessa prima serie la seconda alla terza abbia maggior ragione, che una qualunque quantità presa alla prima della seconda serie, avrà pure nella prima serie la prima alla terza maggior ragione, che la quantità presa non ha alla seconda della seconda serie. Euclide lib. 5. prop. 32.

563. Corol. 5. O pure se nella prima serie starà la prima quantità alla seconda, come la prima alla seconda nella seconda serie; e come la terza alla seconda nella prima serie, così la prima della seconda serie stia ad un'altra quantità; sarà istessamente la prima alla terza nella prima serie, come la presa quantità alla seconda della seconda serie.

564. Corol. 6. Che se nella prima serie starà il primo termine al secondo, come il primo al secondo nella seconda serie; e come il primo al terzo nella prima serie, così un'altra quantità al secondo della seconda serie, starà pure il secondo al terzo nella prima serie, come la quantità presa al primo della seconda serie.

565. Corol. 7. Istessamente se come sta il primo termine al secondo nella prima serie, stia il primo al secondo nella seconda serie; e come sta il terzo al primo nella prima serie, così stia il secondo della seconda serie ad un' altra quantità, starà il secondo al terzo nella prima serie, come la quantità presa al primo della seconda serie.

566. Corol. 8. Se poi date sei quantità, delle quali la prima stia alla seconda, come la quarta alla quinta, e la terza alla prima, come la sesta alla quarta, starà la terza alla seconda, come la sesta alla quinta; come essendo le sei quantità 4, 2, 12, e 6, 3, 18, nelle quali si ha 4 : 2 :: 6 : 3, e 12 : 4 :: 18 : 6, sarà 12 : 2 :: 18 : 3. Euclide lib. 5. prop. 3.

567. Teor. 17. Essendo date quattro quantità proporzionali, poscia se ne diano altre quattro nella stessa proporzione; se si sommeranno per ordine i termini della prima proporzione coi termini della seconda; o se dai termini di una si sottreranno i termini dell' altra; le somme nel primo caso, e le differenze nel secondo saranno nella stessa proporzione: Per esempio essendo 60: 40:: 15: 10; e 12: 8:: 3: 2, sarà tanto 60 + 12: 40 + 8:: 15 + 3: 10 + 2, come 60 − 12: 40 − 8:: 15 − 3: 10 − 2.

Dim. Le due proporzioni essendo (per Ipotesi) le stesse, sarà tanto 60: 40:: 15: 10, e 12: 8:: 3: 2, come 60: 40 :: 12: 8, e 15: 10:: 3; 2; e (pel num. 509. modo 3.) 60: 12:: 40: 8, e 15: 3:: 10: 2. Ma (pel num. 526.) è 60 + 12: 60:: 40 + 8: 40, e 15 + 3: 15:: 10 + 2: 10, o sia (pel num. 509. modo 3.) 60 + 12:: 40 + 8:: 60: 40, e 15 + 3: 10 + 2:: 15: 10; e (per Ipotesi) essendo 60: 40:: 15: 10; dunque sarà 60 + 12: 40 + 8:: 15 + 3: 10 + 2. Lo che si doveva dimostrare. Un consimile raziocinio dimostra la seconda parte.

568. Teor. 18. Essendo date quattro ragioni tali, che i loro antecedenti ordinatamente presi siano proporzionali, e tali siano ancora i conseguenti, le proposte ragioni saranno in proporzione. Per Esempio si abbiano queste quattro ragioni 24: 16, 12: 8, 6: 4, 3: 2, in cui è ÷: 24. 12. 6. 3., e ÷: 16. 8. 4. 2, dico che sarà $\frac{24}{16} : \frac{12}{8} :: \frac{6}{4} : \frac{3}{2}$.

569. La Dim. è evidente, perchè essendo in proporzione tanto gli antecedenti, che i conseguenti, ciascuno degli antecedenti deve avere egual ragione a ciascuno de' conseguenti, e però queste quattro ragioni devono essere proporzionali. Lo che si doveva dimostrare.

570. Se gli antecedenti, e i conseguenti sono in proporzione continua, le quattro ragioni saranno eguali, come nel presente esempio; se poi sono in proporzione discreta, anche le quattro ragioni saranno in proporzione discreta.

571. Corol. 1. Per lo che se saranno date quattro ragioni in proporzione, ed i loro antecedenti siano proporzionali, lo saranno ancora i conseguenti, o pure essendo proporzionali i conseguenti, lo saranno pure gli antecedenti.

572. Corol. 2. Quindi essendo date tre ragioni se ne troverà la quarta in proporzione con prendere (pel num. 494.) il quarto termine proporzionale dopo gli antecedenti, e il quarto dopo i conseguenti, e questi daranno l' antecedente, e il conseguente della cercata ragione.

573. Corol. 3. S' intende in oltre, che se saranno date quattro ragioni proporzionali ad altre quattro, e i conseguenti delle seconde siano antecedenti delle prime, se gli antecedenti delle prime saranno proporzionali, lo saranno ancora i conseguenti delle seconde.

574. Poichè la frazione (pel num. 212.) non è altro, che una certa ragione, che ha il numeratore al denominatore, però qui hanno luogo le dottrine, che, trattando delle frazioni, abbiamo date, cioè qui devonsi richiamare le diverse loro relazioni, e ragioni colà esposte: Per Esempio (giusta il num. 263.) l'aggregato di

più

più ragioni, che hanno lo ſteſſo conſeguente, come $\frac{2}{11}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{1}{11}$, è la medeſima coſa con la ragione, che ha l'aggregato de' numeratori, o antecedenti $2+4+3+1$ al comun denominatore, o conſeguente 11.

575. Corol. 1. Quindi ſe ſi dividerà l'antecedente di una ragione in più parti, la ragione dell'antecedente intero al conſeguente è eguale alla ragione, che ha l'aggregato di tutte le ragioni riſultanti da ciaſcuna parte verſo il conſeguente al conſeguente.

576. Corol. 2. Dal che rendeſi manifeſto, che qualunque ragione ſi può dividere in parti.

577. Corol. 3. Che ſe le parti, in cui ſi divide una ragione, ſaranno tra loro eguali, ſaranno pure eguali tra loro le riſultanti ragioni particolari, e ciaſcuna di queſte ſarà aliquota della ragione totale.

ARTICOLO VI.

Della Compoſizione delle Ragioni.

578. DEf. 1. Quella ragione diceſi compoſta di due ragioni, della quale il denominatore ſta al denominatore d'una di dette due ragioni, come il denominatore dell' altra ragione ſta all' unità.

579. Corol. 1. E però il denominatore della ragione compoſta è il prodotto dei denominatori delle due date ragioni. Parimente il denominatore della ragione compoſta di tre, quattro ec. ragioni è il prodotto de' loro denominatori.

580. Corol. 2. E perchè (pel num. 417.) il denominatore ſta all' unità, come il termine maggiore al minore, la ragione, che avrà il prodotto de' denominatori delle date ragioni all' unità, eſprimerà la ragione compoſta delle ſteſſe ragioni.

581. Corol. 3. E ſiccome la ragione, che ha il prodotto de' denominatori all' unità, è la ſteſſa, che hanno tra loro i prodotti de' lati omologhi delle propoſte ragioni, cioè che ha il prodotto degli antecedenti al prodotto de' conſeguenti; però per avere la ragione compoſta di due, o più date ragioni, baſterà moltiplicare gli antecedenti tra loro, indi i conſeguenti tra loro; e coi prodotti formarne una nuova ragione, che ſarà la ragione compoſta delle ragioni date.

E S E M P I O.

582. Prob. 1. Dati due corpi A, B, e date le ragioni de' loro lati omologhi, cioè la larghezza del primo A ſtia alla larghezza del ſecondo B, come $14:11$; e la lunghezza del primo alla lunghezza del ſecondo come $23:17$; e finalmente la profondità del primo alla profondità del ſecondo come $12:15$; cercaſi la ragione del primo corpo al ſecondo.

583. Riſol. Perchè i Corpi ſtanno fra loro in ragione compoſta delle ragioni delle loro dimenſioni, però i prodotti de' lati omologhi daranno la ragione cercata, cioè ſtarà il corpo A al corpo B, come $14 \times 23 \times 12 : 11 \times 17 \times 15$, cioè come $3864:2805$.

584. Def. 2. Quei prodotti diconſi piani ſimili, i quali hanno i fattori, o lati proporzionali: Come queſti due prodotti 24, 6 ſono due piani ſimili, perchè i due lati del primo 6, 4 ſono proporzionali ai due lati 3, 2 del ſecondo, eſſendo $6:3::4:2$.

585. Corol. 1. Risultando adunque i piani simili dalla moltiplicazione de' lati omologhi, essi staranno fra loro in ragione composta delle ragioni de' loro lati.

586. Corol. 2. Conseguentemente si troveranno due piani simili con prendere quattro quantità geometricamente proporzionali, indi moltiplicare gli antecedenti insieme, e i conseguenti pure insieme.

587. Def. 3. Solidi simili sono que' prodotti, ognuno de' quali risulta da tre fattori, ed i fattori di uno sono proporzionali ai fattori dell'altro: Come *96*, 12 sono due solidi simili, mentre i tre fattori 8, *6*, 2 del primo sono proporzionali ai tre fattori 4, 3, 1 del secondo, essendo 8: 4:: *6*: 3:: 2: 1. Per lo che risultando i solidi simili dalla moltiplicazione de' lati omologhi, essi stanno fra loro in ragione composta delle ragioni de' loro lati; e però per avere due solidi simili basterà prendere sei quantità in proporzione, indi moltiplicare tra loro gli antecedenti, poscia i conseguenti, con che si avranno i prodotti cercati.

588. Qui devesi notare, che acciò due prodotti siano o piani, o solidi simili, non ricercasi, che tutti i lati, da' quali diversamente può risultare un prodotto, siano proporzionali a tutti i lati, da' quali può comunque risultare l' altro prodotto, ma basta, che uno abbia de' lati quali si siano proporzionali a' de' lati quali si siano dell' altro: Per Esempio questi due piani 24, *6* sono simili, perchè i due lati *6*, 4 del primo sono proporzionali ai due lati 3, 2 del secondo, benchè a questi non siano proporzionali questi altri lati 8, 3; ovvero 12, 2 del primo prodotto.

589. Def. 4. Se le ragioni componenti sono simili, o eguali, la ragione da esse composta si dice con nome generale moltiplicata di ciascuna componente. Particolarmente la ragione dicesi duplicata, o sia dupla di due ragioni, quando le ragioni componenti simili sono due: Come la ragione 18: 8, che è composta dalle due *6*: 4, e 3: 2, dicesi duplicata di ciascuna di loro, cioè di *6*: 4; o di 3: 2.

590. Corol. Poichè (pel num. 584.) i piani simili risultano dalla moltiplicazione dei termini omologhi di due ragioni simili, essi stanno fra loro in ragione duplicata della ragione dei loro lati; e *vice versa* la ragione de' lati è subduplicata della loro ragione.

591. Se le ragioni componenti simili sono tre, la ragione da loro composta dicesi triplicata di ciascuna di loro: Come la ragione *648*: 24, che è composta dalle ragioni *9*: 3, 12: 4, *6*: 2, dicesi triplicata di ciascuna di loro, cioè o di *9*: 3, o di 12: 4, o di *6*: 2.

592. Corol. Adunque perchè (pel num. 587.) i solidi simili risultano dalla moltiplicazione dei lati omologhi di tre ragioni simili, essi stanno fra loro in ragione triplicata, d'una delle ragioni de' loro lati; e *vice versa* ciascuna delle ragioni de' lati sta alla loro ragione in ragione suttriplicata.

593. Lo stesso s'intenda della ragione quadruplicata, quintuplicata ec.

594. Da ciò s'intende, che la ragione doppia è molto differente dalla duplicata; la tripla dalla triplicata ec.

595. Essendo il denominatore della ragione composta il prodotto de' denominatori delle ragioni componenti, quindi s'intende, che

596. Corol. 1. Se la ragione composta di due ragioni sarà eguale ad una delle componenti, l'altra delle componenti sarà ragione d'egualità. E *vice versa* se una delle componenti sarà ragione d'egualità, la composta sarà eguale all'altra ragione componente.

597.

597. Corol. 2. Quindi se una di due ragioni componenti sarà maggiore, o minore della composta, sarà l' altra componente minore, o rispettivamente maggiore dell' unità, o sia della ragione d' egualità

598. Corol. 3. Poichè (pel num. 442.) le ragioni devonsi concepire come quantità, se saranno date due ragioni, ognuna delle quali sia composta da altre due, ed una delle componenti la prima sia eguale ad una delle componenti la seconda, sarà (pel num. 504.) la prima ragione composta alla seconda ragione composta, come altra componente della prima all' altra componente della seconda, mentre queste due componenti sono parti simili delle composte, in quanto che risultano dal dividersi le composte per la componente comune: Come essendo le due ragioni $\frac{24}{4}$, $\frac{30}{10}$, la prima delle quali è composta dalle due ragioni $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{2}$; e la seconda dalle due $\frac{3}{2}$, $\frac{10}{5}$, sarà $\frac{24}{4} : \frac{30}{10} :: \frac{8}{2} : \frac{10}{5}$. O pure perchè rispetto alla prima ragione composta si ha (pel num. 578.) $\frac{24}{4} : \frac{8}{2} :: \frac{3}{2} : 1$, e rispetto alla seconda composta si ha $\frac{30}{10} : \frac{10}{5} :: \frac{3}{2} : 1$, e però (pel num. 465.) $\frac{24}{4} : \frac{8}{2} :: \frac{30}{10} : \frac{10}{5}$; e finalmente (pel num. 509. modo 3.) $\frac{24}{4} : \frac{30}{10} :: \frac{8}{2} : \frac{10}{5}$.

599. Corol. 4. Le ragioni componenti pertanto sono aliquote della ragione composta.

600. Corol. 5. Che se saranno date due ragioni composte da egual numero di ragioni, e le ragioni, che compongono la prima prese ad una ad una siano eguali, o maggiori, o minori delle corrispondenti, che compongono la seconda, perchè in tal caso i denominatori di quelle sono eguali, o maggiori, o minori dei denominatori di queste, sarà la prima ragione composta eguale, o maggiore, o minore della seconda ragione composta, e *vice versa*.

601. Teor. 1. Essendo date tre quantità continue proporzionali, come 8, 4, 2, starà la prima alla terza, come il rettangolo della prima nella seconda al rettangolo della seconda nella terza, cioè $8 : 2 :: 8 \times 4 : 4 \times 2$.

602. La Dim. è evidente, perchè i due rettangoli 8×4, 4×2 non sono altro, che la prima, e la terza quantità moltiplicate per uno stesso fattore; e però (pel num. 513.) sarà $8 : 2 :: 8 \times 4 : 4 \times 2$.

603. Teor. 2. Se saranno date due, o più ragioni, delle quali gli antecedenti siano rispettivamente maggiori, o minori de' loro conseguenti; sarà il prodotto degli antecedenti istessamente maggiore, o minore del prodotto de' conseguenti.

604. Dim. Ciascuno degli elementi del primo prodotto è maggiore, o minore di ciascun elemento del secondo prodotto: dunque il primo prodotto è maggiore del secondo. Lo che ec.

605. Teor. 3. Se saranno date due ragioni, ciascuna delle quali sia composta da egual numero di ragioni, starà la prima ragione data alla seconda, come la ragione composta di un qualunque numero di componenti la prima alla ragione composta di egual numero di componenti la seconda: Come essendo date le due ragioni $960 : 8$, e $240 : 10$, la prima delle quali si compone dalle ragioni $8 : 2$; $20 : 4$; $6 : 1$, e la seconda dalle ragioni $20 : 5$; $6 : 2$; $2 : 1$; indi dalle due ragioni per Esempio $20 : 4$; $6 : 1$ si componga la ragione $120 : 4$; e dalle due $6 : 2$; $2 : 1$ si componga la ragione $12 : 2$, sarà $\frac{960}{8} : \frac{240}{10} :: \frac{120}{4} : \frac{12}{2}$

606.

606. Dim. Pel num. 506 due tutti hanno fra loro la stessa ragione, che hanno i prodotti di egual numero delle loro parti aliquote; ma le componenti sono aliquote delle composte; dunque le date ragioni composte stanno fra loro come la ragione composta di un qualunque numero di componenti la prima alla ragione composta di egual numero di componenti la seconda. Lo che si doveva dimostrare.

607. Teor. 4. Essendo date due ragioni, esse staranno tra di loro, come l'antecedente della prima moltiplicato nel conseguente della seconda sta al conseguente della prima moltiplicato nell'antecedente della seconda. Come essendo le due ragioni $8:1$, e $6:2$, sarà $\frac{8}{1}:\frac{6}{2}::8\times2:1\times6$.

608. Dim. Riducendo (pel num. 255.) le due date ragioni $8:1$, $6:2$ allo stesso conseguente, sarà (pel num. 256.) $\frac{8}{1}:\frac{6}{2}::\frac{16}{2}:\frac{6}{2}$. Ma (pel num. 473.) si ha $\frac{16}{2}:\frac{6}{2}::16:6$, conseguentemente sarà $\frac{8}{1}:\frac{6}{2}::8\times2:1\times6::16:6$. Lo che si doveva ec.

609. Teor. 5. Se saranno date più quantità continue proporzionali, come 243, 81, 27, 9, 3, la ragione della prima a qualunque altra sarà composta dalle ragioni di tutte le intermedie; e in particolare la ragione della prima alla terza sarà duplicata della ragione della prima alla seconda: La ragione della prima alla quarta sarà triplicata della ragione della prima alla seconda: La ragione della prima alla quinta sarà quadruplicata ec.

610. Dim. Essendo (per Ipotesi) $27:9::9:3$, sarà (pel num. 581.) il prodotto degli antecedenti al prodotto de' conseguenti, cioè 27×9 a 9×3 in ragione composta, o sia duplicata (pel num. 589.) della ragione $27:9$. Ma (pel num. 513.) si ha $27\times9:9\times3::27:3$; dunque sarà $27:3$ in ragione duplicata della ragione $27:9$. Parimente essendo (per Ipotesi) $81:27::27:9::9:3$, sarà (pel num. 581.) il prodotto dei tre antecedenti 81, 27, 9 al prodotto dei tre conseguenti 27, 9, 3 in ragione composta, o sia triplicata (pel num. 591.) della ragione $81:27$. Ma (pel num. 475.) se l'uno, e l'altro termine della ragione $81\times27\times9:27\times9\times3$ si dividerà per la stessa quantità 27×9, i quozienti $81:3$ avranno la stessa ragione delle quantità divise: dunque sarà $81:3$ in ragione triplicata della ragione $81:27$ ec. Lo che doveva dimostrare.

611. Corol. 1. E però s'intende come la ragione composta di due ragioni simili sia duplicata d'ognuna di loro, avvegnachè l'antecedente della ragione composta stia al suo conseguente, come l'antecedente d'una delle date componenti sta a quel numero, che in ordine lo seguita per terzo continuo proporzionale dopo il suo conseguente: Lo che a proporzione dicasi della ragione triplicata ec. Onde si avrà la ragione composta di due date ragioni, se come sta l'antecedente della prima ragione componente al suo conseguente, così si porrà il conseguente della seconda ragione componente ad una terza quantità, nel qual caso l'antecedente della seconda ragione componente starà a questa terza quantità in ragione composta delle due date ragioni: Come essendo le due ragioni $6:3$, $8:2$, se si farà $6:3::2:1$, sarà $8:1$ in ragione composta delle due ragioni $6:3$, $8:2$.

612. Corol. 2. Parimente essendo date tre ragioni, se si prenderà primieramente la ragione composta delle due prime date ragioni, poscia si faccia come l'antecedente della terza ragione al suo conseguente, così il conseguente della poc'anzi trovata ragione composta delle due prime ragioni ad una terza quantità, sta-

rà

rà l'antecedente della detta ragione composta a questa terza quantità in ragione composta delle tre date ragioni. Collo stesso metodo si proceda per avere la ragione composta di quattro date ragioni ec.

613. Corol. 3. Quindi essendo date più ragioni componenti, e volendosi per antecedente della loro ragione composta l'antecedente d'una delle date ragioni componenti, basterà istituire (giusta le cose dette) le seguenti analogie, nel qual caso il detto antecedente starà all'ultimo conseguente dell'ultima analogia in ragione composta di tutte le ragioni date: come volendosi la ragione composta delle seguenti ragioni 2 : 4, 3 : 15, 3 : 9, 2 : 10, e per antecedente della ragione composta volendosi l'antecedente 2 della prima ragione, s'instituiscano le seguenti analogie, cioè come l'antecedente 3 della seconda ragione al suo conseguente 15, così il conseguente 4 della prima ragione al quarto, che è 20: Poi come l'antecedente 3 della terza ragione al suo conseguente 9, così il 20 poc' anzi trovato al quarto 60. Finalmente come l'antecedente 2 della quarta ragione al suo conseguente 10, così il 60 pur ora trovato al quarto 300; lo che fatto starà l'antecedente 2 della prima ragione all'ultimo conseguente trovato 300 in ragione composta delle quattro date ragioni

3 : 15 : : 4 : 20
3 : 9 : : 20 : 60
2 : 10 : : 60 : 300

614. Corol. 4. Che se per antecedente della ragione composta si vorrà qualunque altra quantità, per Esempio 9, bisognerà istituire le seguenti analogie, nella prima delle quali come sta l'antecedente della prima ragione al suo conseguente, così la presa quantità 9 alla quarta 18; e nella seconda come l'antecedente della seconda ragione al suo conseguente, così la quarta trovata quantità 18 ad un'altra 90, e nello stesso modo devesi operare finchè vi sono ragioni: Onde nel seguente Esempio la ragione di 9 a 1350 è composta delle quattro ragioni date.

2 : 4 : : 9 : 18
3 : 15 : : 18 : 90
3 : 9 : : 90 : 270
2 : 10 : : 270 : 1350

615. Corol. 5. Ma perchè le due ragioni di qualunque analogia sono eguali (pel num. 448.), sarà lo stesso (pel num. 465.) il porre nella prima delle precedenti quattro analogie le due ragioni 2 : 4 : : 9 : 18, che ripetere la seconda ragione facendo 9 : 18 : : 9 : 18, nel qual caso il primo termine della prima analogia starà all'ultimo dell'ultima analogia in ragione composta di tutte le date ragioni.

616. Corol. 6. Adunque la ragione composta di più ragioni risulta dal primo, e dall'ultimo di tanti termini più uno, quante sono le ragioni date, de' quali termini ognuno procede continuamente in proporzione relativa ad una per ordine delle date ragioni: Come nel precedente Esempio, in cui sono date quattro ragioni, la loro ragione composta risulta dalla ragione del primo all'ultimo di questi cinque termini 9, 18, 90, 270, 1350.

617.

617. Corol. 7. Se si avranno pertanto più quantità continue proporzionali, la ragione della prima all' ultima farà composta di tutte le ragioni delle quantità intermedie, come si è detto al num. 609.: E però essendo date due quantità, come 32, 2, se si frapporranno tra loro quante quantità si vogliono omogonee proporzionali, farà 32 : 2 il prodotto delle ragioni delle quantità intermedie, o sia 32 : 2 farà la ragione composta delle ragioni delle quantità frapposte.

618. Corol. 8. Essendo che le ragioni sono, e devonsi concepire come quantità (pel num. 442.); però quello che abbiamo detto delle quantità devesi ancora dire delle ragioni. Per lo che essendo date molte ragioni in proporzione, la prima alla terza avrà ragione duplicata della prima alla seconda; La prima alla quarta ragion triplicata ec.

619. Teor. 6. Essendo date due ragioni eguali, come 3 : 6, e 2 : 4, starà una di queste ragioni, come la prima 3 : 6 in ragione composta delle ragioni del primo termine al terzo; del terzo al quarto, e del quarto al secondo, cioè delle ragioni 3 : 2, 2 : 4, 4 : 6, e però farà 3 : 6 :: 3 X 2 X 4 : 6 X 2 X 4.

620. La Dim. è chiara, mentre se i termini della ragione 3 X 2 X 4 : 6X2X4 si divideranno per la stessa quantità 2X4, per cui sono moltiplicati, farà (pel num. 475.) 3 : 6 :: 3X2X4 : 6X2X4. Lo che si doveva dimostrare.

621. Teor. 7. Se una proposta ragione come 240 : 30, o sia 8 : 1 farà composta di quante si vogliono ragioni, che nel caso presente sono 4 : 2, 6 : 3, 10 : 5; qualunque delle sue componenti si comporrà direttamente dalla proposta 8 : 1, e reciprocamente dalle altre: Per Esempio la componente 4 : 2 farà come 8X3X5 : 1X6X10; cioè composta della ragione diritta 8 : 1, e dalle rimanenti due 6 : 3, 10 : 5 prese reciprocamente così 3 : 6, 5 : 10.

622. Dim. Poichè la ragione 8 : 1 si compone dalle ragioni 4 : 2, 6 : 3, 10 : 5, farà (pel num. 581.) 8 : 1 :: 4X6X10 : 2X3X5; e (pel num. 488.) farà 8X2X3X5 = 1X4X6X10; onde finalmente (pel num. 491.) 4 : 2 :: 8X3X5 : 1X6X10. Lo che si doveva dimostrare.

ESEMPIO.

623. Prob. 2. Dati due fiumi A, B, de' quali il primo è largo 64 Tese, e profondo ragguagliatamente 15; il secondo è largo 50. Tese, e profondo 10; in oltre il primo scarica in un minuto secondo Tese solide 2880, ed il secondo nello stesso tempo ne scarica 1000.; cercasi la proporzione delle velocità medie di questi due fiumi.

624. Risol. Poichè le moli d' acqua scaricate stanno in ragione composta delle ragioni delle larghezze, delle profondità, e delle velocità; starà la ragione componente della velocità in ragione composta della diritta delle moli d' acqua, e delle ragioni reciproche delle larghezze, e delle profondità: Ma la ragione delle larghezze è 64 : 50, e la ragione delle profondità è 15 : 10, che prese reciprocamente sono 50 : 64, 10 : 15: Però la velocità media del primo fiume starà alla velocità media del secondo come 2880X50X10 : 1000X64X15, cioè come 1440000 : 960000, o sia 3 : 2, conseguentemente la velocità media del primo fiume è 3, e la velocità media del secondo è 2.

625. Teor. 8. Due ragioni composte saranno eguali qualora risultino da due ordini di ragioni componenti eguali, supposto però, che tante ragioni siano in un' ordine, quante ne sono nell'altro.

626.

626. Dim. La ragione composta (pel num. 616.) risulta dal primo, e dall' ultimo di tanti termini più uno, quante sono le ragioni componenti, de' quali termini ognuno procede continuamente in proporzione relativa ad una per ordine delle date ragioni: Ma (per Ipotesi) le ragioni componenti di una sono eguali alle ragioni componenti dell' altra; dunque le due serie di termini procederanno egualmente, e saranno eguali di numero, e però la ragione del primo all' ultimo in una serie sarà eguale alla ragione del primo all' ultimo nell' altra serie, e conseguentemente saranno eguali le due ragioni composte. Lo che si doveva ec.

627. Corol. 1. Se adunque due ragioni composte saranno eguali, eguali pure saranno le loro componenti. Euclide lib. 5. prop. 35. E se due ragioni composte saranno disuguali, disuguali ancora saranno le componenti; o pure se le componenti saranno disuguali, lo saranno eziandio le composte.

628. Corol. 2. Quindi se tra due quantità A, B caderanno quante medie proporzionali si vogliono, ed altrettante ne cadano tra altre due quantità C, D, e ciascuna delle ragioni intermedie componenti la prima ragione A : B sia eguale a ciascuna delle ragioni intermedie componenti la seconda ragione C : D, sarà A : B = C : D. Euclide lib. 5. prop. 34.

629. Corol. 3. E però essendo date due serie di quantità nella stessa proporzione continua, come 2, 4, 8, 16, 32, 64; e 3, 6, 12, 24, 48, 96, come starà la prima della prima serie ad un'altra dalla prima comunque distante, così starà la prima della seconda serie ad un' altra da questa prima egualmente distante: Per Esempio 2 : 32 :: 3 : 48.

630. Corol. 4. Se poi due ragioni composte saranno eguali, come $\frac{80}{10}$, $\frac{24}{3}$, delle quali le componenti sono due cioè $\frac{8}{2}$, $\frac{10}{5}$ rispetto alla $\frac{80}{10}$, e $\frac{2}{1}$, $\frac{12}{3}$ rispetto alla $\frac{24}{3}$ quanto la componente $\frac{8}{2}$ è maggiore della componente $\frac{2}{1}$, altrettanto la componente $\frac{10}{5}$, deve essere minore della componente $\frac{12}{3}$, altrimenti (pel num. 600.) le due date ragioni non potrebbero essere eguali.

631. Corol. 5. Qualora nei due ordini delle ragioni componenti ve ne sono alcune tra loro eguali, le due ragioni composte staranno fra loro come stanno le ragioni composte dalle rimanenti ragioni ineguali. Lo che costa dal num. 598.

632. Corol. 6. Dal num. poi 596. s'intende che se una data ragione composta avrà tra le sue componenti alcune ragioni d'egualità, ella si comporrà solamente da quelle ragioni, che non sono ragioni d'egualità: Per lo che tutte le ragioni componenti, che sono ragioni d'egualità, si possono levare dal prodotto di tutte le ragioni componenti, che constituiscono una ragione composta, senza alterare il suo valore.

633. Corol. 7. Risultando l' antecedente, e il conseguente della ragione composta da termini in proporzione relativa alle ragioni componenti, se due ragioni componenti saranno reciproche, quanto si è accresciuto il secondo termine in proporzione alla prima ragione, altrettanto si diminuisce il terzo, che sta in proporzione alla seconda ragione; onde il primo termine sarà eguale al terzo, e in conseguenza la ragione composta di due ragioni reciproche sarà ragione d'egualità: Come essendo 2 : 4, 6 : 3 le ragioni componenti, la ragione composta sarà 12 : 12. E *vice versa* se la ragione composta da due ragioni sarà ragione d' egualità, le componenti saranno reciproche.

634. Corol. 8. Per la qual cosa se una data ragione composta da due ragioni si comporrà di nuovo con una delle sue componenti, ma presa reciprocamente, ne risulterà l'altra ragione componente: Come se la ragione 24 : 3 composta dalle due *6* : 3, 4 : 1 si comporrà di nuovo con una di queste presa reciprocamente, per Esempio con 3 : *6*, ne verrà l'altra 4 : 1.

635. Corol. *9*. Quindi data una ragione composta, della quale le componenti siano note fuori d'una, si ha il modo di conoscere quest'altra incognita componente con comporre di nuovo la data ragione composta colla ragione composta di tutte le ragioni cognite presa reciprocamente.

636. Poichè la ragione composta ha relazione alle ragioni componenti, se di due date ragioni si prenderà la ragione composta, si avranno sei quantità, cioè le due della ragione composta, e le quattro delle due ragioni componenti, le quali sei quantità potransi dire proporzionali. Date essendo pertanto sei quantità, come 2 : 1, 4 : 3, *9* : *6* proporzionali in modo, che la ragione della prima alla seconda sia composta dalle ragioni della terza alla quarta, e della quinta alla sesta, in diciotto diversi modi si potranno tra loro disporre queste sei quantità, così che in ciascuno dei detti modi la ragione della prima alla seconda sia composta dalle ragioni della terza alla quarta, e della quinta alla sesta.

637. Qui soggiungo i diciotto diversi modi, ne' quali disporre si possono le suddette sei quantità 2 : 1, 4 : 3, *9* : *6*, ovvero altre quali si siano, tali però, che la ragione della prima alla seconda sia composta dalle ragioni della terza alla quarta, e della quinta alla sesta.

2 : 1	4 : 3	9 : 6
2 : 1	9 : 3	4 : 6
3 : 1	9 : 2	4 : 6
3 : 1	4 : 2	9 : 6
6 : 1	9 : 2	4 : 3
6 : 1	4 : 2	9 : 3
4 : 2	3 : 1	6 : 9
4 : 2	6 : 1	3 : 9
9 : 2	3 : 1	6 : 4
9 : 2	6 : 1	3 : 4
4 : 3	2 : 1	6 : 9
4 : 3	6 : 1	2 : 9
9 : 3	2 : 1	6 : 4
9 : 3	6 : 1	2 : 4
6 : 4	1 : 2	9 : 3
6 : 4	9 : 2	1 : 3
9 : 6	2 : 1	3 : 4
9 : 6	3 : 1	2 : 4

638. Può accadere, che qualch'una di queste sei quantità s'ignori, però soggiungerò la maniera di ritrovarla speditamente, qualunque ella sia.

639. Prob. 3. Debbasi ritrovare una, qualunque siasi, di sei quantità, delle quali la prima stia alla seconda in ragione composta della terza alla quarta, e della quinta alla sesta.

640.

640. Risol. Se l'ignota sarà la sesta, si moltiplichino insieme la seconda, la terza, e la quinta ed il loro prodotto si divida pel prodotto della prima nella quarta, ed il quoziente darà la sesta cercata.

641. Se l'incognita sarà la quinta, si moltiplichi la prima, la quarta, e la sesta, ed il loro prodotto si divida pel prodotto della seconda nella terza, ed il quoziente darà la quinta cercata.

642. Se si dovrà trovare la quarta, si moltiplichino insieme la seconda, la terza, e la quinta, ed il loro prodotto diviso pel prodotto della prima nella sesta darà di quoziente la quarta cercata.

643. Per trovare la terza si moltiplichino insieme la prima, la quarta, e la sesta, ed il loro prodotto diviso pel prodotto della seconda nella quinta darà per quoziente la terza cercata.

644. Per trovare la seconda si moltiplichino insieme la prima, la quarta, e la sesta, ed il prodotto diviso pel prodotto della terza nella quinta darà per quoziente la seconda.

645. Se finalmente si dovrà trovare la prima, si moltiplicheranno insieme la seconda, la terza, e la quinta, ed il loro prodotto diviso pel prodotto della quarta nella sesta darà per quoziente la prima.

646. Dim. Essendo (per Ipotesi) $2:1$ in ragione composta di $4:3$, e $9:6$, sarà (pel num. 581.) $2:1::4\times9:3\times6$, e però (pel num. 488.) $2\times3\times6 = 1\times4\times9$. Dunque perchè questi due prodotti sono eguali, se (pel num. 130.) si divideranno rispetto al primo caso per 2×3, i quozienti, o sia il quoziente sarà 6, che è la stessa quantità cercata. Nel secondo caso se la divisione si farà per 1×4 il quoziente sarà 9. Nel terzo caso se si farà la divisione per 2×6, il quoziente sarà 3. Nel quarto caso facendosi la divisione per 1×9, il quoziente sarà 4. Nel quinto caso dividendosi per 4×9, il quoziente sarà 1. Finalmente nel sesto caso facendosi la divisione per 3×6, il quoziente sarà 2. Lo che dovevasi dimostrare.

ARTICOLO VII.

Della Proporzione Armonica.

647. DEf. 1. La proporzione armonica consiste nella similitudine, che di tre date quantità ha la ragione degli estremi con la ragione delle due differenze; vale a dire consiste nella somiglianza delle ragioni della prima quantità alla terza, e della differenza tra la prima quantità, e la seconda, alla differenza tra la seconda quantità, e la terza, così che fra le dette quantità ne siavi la stessa differenza, come nella proporzione Aritmetica, nella stessa ragione, come nella proporzione geometrica: Per Esempio questi tre numeri 18, 27, 54 diconsi proporzionali armonici, perchè si ha $18:54::27-18:54-27$.

648. Def. 2. Quattro quantità si dicono in proporzione armonica qualora stia la prima alla quarta, come la differenza tra la prima, e la seconda alla differenza tra la terza, e la quarta.

649. Def. 3. La proporzione contro-armonica è quella, in cui la differenza tra la prima quantità, e la seconda sta alla differenza tra la terza, e la quarta, come la quarta sta alla prima.

650. Def. 4. Se i termini saranno tre, la proporzione contro-armonica sarà quella, in cui la differenza tra il primo, e il secondo sta alla differenza tra il secondo, e il terzo, come il terzo sta al primo.

651. Def. 5. La proporzione armonica si dice continua ogniqualvolta i primi tre termini sono armonicamente proporzionali; poscia lasciato il primo, gli altri tre seguenti sono pure armonicamente proporzionali; e così lasciati i due ptimi lo sono i tre seguenti ec. Come 10, 12, 15, 20, 30, 60, ec. poichè tanto i tre primi 10, 12, 15; come i tre 12, 15, 20; così i tre 15, 20, 30; e finalmente i tre 20, 30, 60 sono armonicamente proporzionali; dove come si vede, si cambia sempre la proporzione degli estremi.

652. Def. 6. La proporzione si dirà continua contro-armonica, se i termini saranno continuamente contro-armonici nel modo detto al num. 651.

653. Prob. si debbano trovare tre quantità armonicamente proporzionali.

654. Risol. si prendano tre quantità aritmeticamente proporzionali, come 1, 2, 3, poi si moltiplichi la prima nella seconda; poscia la prima nella terza; finalmente la seconda nella terza, e i tre prodotti 2, 3, 6, che ne risulteranno, saranno armonicamente proporzionali.

655. Dim. Essendo (per Ipotesi) 1, 2, 3 proporzionali aritmetici, sarà (pel num. 400.) $1-2=2-3$, e moltiplicando i termini dell'una, e dell'altra ragione per 6 prodotto dei dati tre termini 1, 2, 3, si avrà $6-12=12-18$. Ora se si dividerà la differenza della prima ragione $6-12$ per 2 primo termine della proporzione armonica trovata, di poi si divida la differenza della seconda ragione $12-18$ per 6 terzo termine della ritrovata proporzione armonica, si avrà $3-6$: $2-3 :: 6 : 2$ (essendo lo stesso dividere la differenza, che dividere i termini della ragione), o sia $2-3 : 3-6 :: 2 : 6$ (pel num. 509. modo 3.).

656. Corol. 1. Se adunque vi sarà qualche numero, per Esempio 60, divisibile esattamente per una serie di divisori in proporzione aritmetica, come 1, 2, 3, 4, 5, 6, i quozienti 60, 30, 20, 15, 12, 10 saranno armonicamente proporzionali.

657. Corol. 2. Date essendo tre quantità in proporzione armonica, se si moltiplicherà la prima nella seconda, indi nella terza; poi la seconda nella terza, si avranno tre quantità in proporzione aritmetica.

658. Corol. 3. Quindi si vede come si possano ritrovare tre quantità armonicamente proporzionali, delle quali le estreme abbiano una data ragione, bastando prendere ad arbitrio due quantità, che abbiano la data ragione, fra le quali si troverà primieramente (pel num. 409.) la media proporzionale, indi si opererà giusta il num. 654. con che si avranno tre quantità in proporzione armonica.

659. Il fin' ora detto può bastare per avere qualche cognizione delle quantità armonicamente proporzionali, non essendo nostro scopo il trattarne a pieno.

ARTICOLO VIII.

Delle Regole di proporzione, e primieramente della Regola del Tre.

660. DEF. 1. La regola del Tre non è altro, che il modo di ritrovare una quarta quantità proporzionale a tre altre quantità già date; lo che si ottiene giusta il num. 494. Si osservi però, che se la ragione de' due primi termini sarà espressa da un numero intero, in tal caso si potrà abbreviare l'operazione con mol-

moltiplicare per questo esponente il terzo termine, mentre il prodotto sarà il quarto termine cercato: Come cercandosi il quarto termine proporzionale a questi tre 7 : 28 : : 49 : , perchè l' esponente de' due primi termini è 4, basterà moltiplicare con questo esponente 4 il terzo termine 49, ed il prodotto 196 sarà il quarto termine cercato: E di ciò la ragione si è, perchè (pel num. 416.) con moltiplicarsi l'esponente nel termine minore si ha il termine maggiore; ma perchè di quattro termini proporzionali il primo sta al secondo, come il terzo al quarto, o sia l' esponente de' due primi termini è lo stesso, che l'esponente degli altri due; dunque con moltiplicarsi il terzo termine per l'esponente de' due primi, il prodotto deve essere il quarto termine. Che se de' due primi termini il primo fosse moltiplice del secondo, in tal caso il terzo termine devesi dividere per l' esponente dei due primi, ed il quoziente sarà il quarto termine cercato: Come essendo dati i tre termini, 28 : 7 : : 196 : il quarto termine sarà $\frac{196}{4} = 49$. Qualora l' esponente de' due primi termini non sarà un numero intero; ma però (non essendo questi due primi termini numeri primi fra loro) sia una frazione esprimibile con numeri bassi, anche in questo caso si abbrevierà l' operazione con sostituire (giusta il num. 465.) questi due numeri bassi in luogo de' due primi termini, operando poscia giusta il num. 494. Come volendosi il quarto termine proporzionale a questi tre 46 : 69 : : 118, perchè l' esponente de' due primi termini è espresso da $\frac{2}{3}$, o sia da 2 : 3, si farà 2 : 3 : : 118 : , onde speditamente si avrà $3 \times \frac{118}{2} = 177$ pel quarto termine cercato.

661. Delle date tre quantità due devono essere omogenee (pel num. 394.), cioè o la prima, e la seconda, nel qual caso saranno pure omogenee la terza, e la quarta: ovvero la prima, e la terza, ed allora saranno omogenee la seconda, e la quarta. Ad una di queste tre quantità deve essere annessa la questione, e tale quantità devesi porre in terzo luogo.

662. Quale sia la regola del tre diritta, quale la rovescia, lo abbiamo detto ai numeri 461, 462.

663. La regola del tre ha luogo solamente nelle quantità veramente proporzionali, non già in quelle che non sono tali, come sono fra le altre molte cose fisiche: Per Esempio se un Corpo discendente colla sua gravità naturale fa 10 pertiche in 8 minuti, non si può dire, che in 24 minuti faccia 30 pertiche, benchè questo numero sia il quarto proporzionale, perchè il grave nel discendere accelera sempre il suo moto, e però la quantità di tale moto non è proporzionale al tempo. Ma veniamo agli esempj.

Esempio della Regola del Tre diritta.

664. Prob. 1. Debbasi determinare il centro comune di gravità della Terra, e della Luna, dei quali due corpi sono date le masse, e le distanze, mentre la Terra pesa in circa 40 volte più della Luna; e il centro della Luna è lontano dal centro della Terra d' incirca 61 semidiametri terrestri.

665. Risol. Poichè, dati due Corpi come sta la somma delle loro masse alla massa per esempio del primo corpo, così sta la loro distanza alla distanza del centro comune di gravità dal secondo corpo; però si faccia come 41 somma delle Masse della

della Luna, e della Terra ad 1 massa della Luna, così 61 distanza della Terra dalla Luna ad $1\frac{20}{41}$ distanza del loro centro comune di gravità dalla terra: conseguentemente il centro comune di gravità della Luna, e della Terra dista dalla Terra semidiametri terrestri $1\frac{20}{41}$, cioè piedi di Parigi $14646489\frac{5}{82}$, stante che il semidiametro terrestre è piedi di Parigi $9844362\frac{1}{2}$.

666. Isteffamente si opererà qualora le tre quantità proposte ammettano frazioni, operando secondo le regole date delle frazioni. Se poi una sola sarà la quantità con frazione, in tal caso mediante la moltiplicazione si potranno preparare più commodi i termini, e schivare la molestia delle frazioni, moltiplicando cioè il primo termine, e il secondo, o il primo, e il terzo col denominatore del rotto, lo che non turba la loro ragione giusta il num. 513.

ESEMPIO DEL PRIMO CASO.

667. Prob. 2. Un Mercante, che si trova in Genova, dovendo fare un certo sborso in Venezia, cerca se gli torni più conto fare lo sborso con Doppie di Spagna, o pure con Ungheri, mentre la Doppia di Spagna in Genova vale a ragione di Paoli $35\frac{1}{2}$, ed in Venezia vale lire Venete $34\frac{2}{3}$; l' Unghero poi vale in Genova a ragione di Paoli $19\frac{1}{5}$, ed in Venezia vale lire Venete $18\frac{6}{7}$.

668. Risol. Si faccia una regola di proporzione dicendo: Se la Doppia di Spagna, che in Genova Paoli $35\frac{1}{2}$, in Venezia vale lire $34\frac{2}{3}$; l' Unghero che in Genova vale Paoli $19\frac{1}{5}$, in Venezia quanto valerà? E riducendo primieramente questi tre termini in frazione (pel num. 240.), si avrà $\frac{71}{2}$, $\frac{104}{3}$, $\frac{96}{5}$, si operi poscia giusta il num. 494. moltiplicando cioè il secondo termine nel terzo, indi dividendo il prodotto pel primo, con che ne viene di quoziente $18\frac{798}{1065}$ valore che deve avere l' Unghero in Venezia; ma perchè corre lire $18\frac{6}{7}$, che è maggiore di $18\frac{798}{1065}$, però trovasi, che v'è del vantaggio a fare lo sborso cogli Ungheri. Ecco il Calcolo.

Secondo termine. Terzo termine	Divisore Prodotto
$\frac{104}{3} \times \frac{96}{5}$	$\frac{71}{2} \Big| \frac{9984}{15}$
Prodotto $\frac{9984}{15}$	Quoziente $\frac{19968}{1065} = 18\frac{798}{1065}$

ESEM-

ESEMPIO DEL SECONDO CASO.

669. Prob. 3. Data la lunghezza dell' ombra, che getta una Torre, di piedi $20\frac{2}{3}$, debbasi ritrovare la di lei altezza.

670. Risol. Nel tempo stesso, in cui si misura la lunghezza dell' ombra della Torre; si prenda un Bastone di una nota altezza, per Esempio di 5 piedi, quale si poggi in terra diritto in modo, che non inclini nè da una parte nè dall' altra. Fatto questo si osservi l' ombra, che egli getta, a motivo d' essere esposto al Sole, e la lunghezza della di lui ombra sia per esempio 2. piedi. Ora perchè le ombre in uno stesso luogo sono proporzionali all' altezza del corpo ombroso, si mettano questi tre termini in proporzione così: Come 2 lunghezza dell' ombra del bastone a 5, che e la sua altezza, così $\frac{62}{3}$ (perchè $20\frac{2}{3}=\frac{62}{3}$) lunghezza dell' ombra della Torre (ma per liberare il terzo termine dal denominatore 3, si moltiplichi il primo termine 2 della proporzione per questo denominatore 3, onde i tre termini saranno $6 : 5 :: 62$) al quarto, che (giusta il num. 494.) trovasi essere $51\frac{2}{3}$, e però l' altezza della Torre è piedi $51\frac{2}{3}$.

671. Nella regola del tre devesi osservare, che se il primo, e il secondo termine saranno di una medesima spezie, il quarto sarà della stessa spezie del terzo; e se saranno della medesima spezie il primo, e il terzo, il quarto sarà della stessa spezie del secondo.

672. Il modo di operare è lo stesso tanto rispetto alle frazioni decimali, come rispetto alle frazioni sessagesime. Ne darò nientedimeno gli Esempj.

ESEMPIO NELLE FRAZIONI DECIMALI.

673. Prob. 4. Debbasi determinare il diametro de' globetti del sangue di que' piccoli animaletti, che tanti scuoprinne il Lewenhoek nel latte di un Merluzzo fino a sorpassare il numero degli abitanti di tutta la Terra.

674. Risol. Avendo scoperto il Lewenhoek, che il corpo ordinario di un'Uomo sta ad uno di questi piccoli animali come 17 a 0. 00003, ed in oltre, che il diametro de' globi del sangue di un Uomo non sorpassa 0. 00001388 di un pollice, però facendo 17 : 0. 00003 :: 0. 00001388, si avrà per quarto termine 0. 00000000245, che determina il diametro cercato. Ecco il Calcolo.

0. 00001388
0. 00003

Prodotto 0. 0000000004164

Divisore 17 | Dividendo 0. 0000000004164

Quoziente che dà il quarto termine cercato 0. 00000000245

ESEM-

ESEMPIO NELLE FRAZIONI SESSAGESIME.

675. Prob. 5. Dato l'anno sidereo di giorni 365, ore 6, 9', 8", e data la regressione media de' punti equinoziali nel piano dell' Ecclittica di 50 . 3"; cercasi il tempo in cui si percorrono dal Sole questi 50 . 3", e però cercasi quanto tempo impiega il Sole a ritornare allo stesso punto dell' Equinozio, da cui partì.

676. Risol. Primieramente si riducano a secondi i gradi 360 periodo del Sole, e ne vengono 1296000", cui si aggiungano i secondi 50 . 3" con ridurre prima a decimi i 1296000", e si avranno 1296050 . 3"; poscia si riduca a secondi il tempo dell'anno sidereo 365, 6, 9', 8", e ne verranno 31558148". Lo che fatto s' istituisca la seguente proporzione: Come 1296050. 3" : 31558148" :: 50. 3" al quarto; e perchè il primo, e il terzo termine hanno annesse frazioni decimali dello stesso ordine, queste si tolgano, onde i tre termini in proporzione saranno 12960503' : 31558148" :: 503" al quarto, che trovasi essere $1224 \frac{10092772''}{12960503}$, che ridotti a minuti primi, sono incirca 20', 25", tempo cercato corrispondente alla regressione media 50. 3"; che però se si sottreranno questi trovati 20', 25" dal dato anno sidereo 365, 6, 9', 8", si avrà 365, 5, 48', 43" tempo, che impiega il Sole a ritornare allo stesso punto d'Equinozio. Ecco il Calcolo.

Periodo del Sole di gradi 3 6 0
Minuti primi 6 0
Prodotto 2 1 6 0 0'
Minuti secondi 6 0

Stessamente ridotti i 365, 6, 9', 8" a secondi si hanno 31558148".

Prodotto 1 2 9 6 0 0 0", che ridotti a decimi sono 1296000. 0, con cui sommati i 50. 3 si ha

1 2 9 6 0 0 0. 0
5 0. 3
Somma 1 2 9 6 0 5 0. 3

Ora si faccia 12960503" : 31558148" :: 503" al quarto, che si ha con moltiplicare i 31558148" ne' 503", il di cui prodotto è 15873748444‴, che diviso pel primo termine 12960503" lascia di quoziente $1224 \frac{10092772''}{12960503}$ che diviso per 60, è incirca 20', 25".

677. Quanto alla regola del tre reciproca, o rovescia stando il primo al secondo, come il quarto al terzo (pel num. 462.), ed essendo (pel num. 488.) il prodotto degli estremi eguale al prodotto de' medii, sarà il prodotto del primo nel terzo diviso pel secondo eguale al quarto cercato.

ESEMPIO.

678. Prob. 6. Date certe provvisioni, con cui si possono mantenere 94 Soldati per 4230 giorni, cercasi quanti Soldati si potranno mantenere colle medesime provvisioni per 141 giorni.

679.

679. Risol. Poichè quanto si diminuisce il numero de' giorni, tanto si accresce il numero de' Soldati, però la regola è rovescia. Si dispongano pertanto i termini così 4230 : 141 : : 94 al quarto, che giusta il num. 677. trovasi essere 2820; onde colle date provvisioni si possono mantenere 2820 Soldati per 141. giorni. Ecco il Calcolo.

Giorni	Giorni	Soldati
4230 :	141 : :	94

```
Giorni    4 2 3 0              Divisore        Dividendo
Soldati       9 4                1 4 1 |     3 9 7 6 2 0
          -------                       --------------
          1 6 9 2 0                          2 8 2 0   quoziente
        3 8 0 7           che dà il quarto termine cercato.
        ---------
Prodotto 3 9 7 6 2 0
```

Disposti i termini così 4230 : 94 : : 141 dovrebbesi moltiplicare il primo nel secondo, ed il prodotto dividerlo pel terzo.

680 Nella proporzione reciproca stando il primo termine al secondo, come il quarto al terzo, starà pure (pel num. 509. modo 7.) quello che era secondo a quello, che era primo, così quello, che era terzo, a quello che deve essere il quarto, e che si cerca: Per lo che la regola del tre, che era rovescia si riduce in questo modo ad essere diritta, mediante cioè il disporre i termini nel modo ora detto; che però se nella presente disposizione si moltiplicherà il secondo termine nel terzo, ed il prodotto si divida pel primo, il quoziente darà il quarto termine cercato.

ESEMPIO.

681. Prob. 7. Cercasi il luogo, che dimandava Archimede allorchè si propose di voler muovere la Terra.

682. Risol. Egli costa, che Archimede voleva muovere la Terra per mezzo di una Leva, in cui si sa, che le celerità, o sia le distanze della potenza, e del peso dal punto d' appoggio devono stare in ragione reciproca delle masse. Ora al numero 124. abbiamo trovato la solidità della Terra di piedi cubi, o solidi 3997846798940344927500, che però se si supporrà, che ogni piede solido pesi 100 libbre, si avranno 399784679894034492750000 libbre pel peso di tutta la Terra. Ciò posto si supponga, che la forza d' Archimede equivaglia a 200 libbre, e che la Terra sia distante dal fulcro, su cui deve appoggiare la Leva, 6000 miglia; onde per avere il luogo cercato non altro resta, che ritrovare la lunghezza dell' altro braccio della Leva, alla di cui estremità doveva Archimede applicare la sua forza: Ma perchè, come ho detto, le distanze della potenza, e del peso dal punto d'appoggio devono stare in ragione reciproca delle masse, però per avere il braccio cercato si dovrebbero disporre i termini così

399784679894034492750000 : 200 : : 6000 :

P   indi

indi moltiplicare il primo pel terzo, ed il prodotto dividerlo pel secondo a fine di avere il quarto, che deve dare la cercata lunghezza. Che se si disporranno questi termini nel modo detto al num. 680 così

200 : 3997846798940344927500000 : : 6000

la regola del Tre di rovescia, che era, si farà diritta, e con moltiplicare il terzo termine nel secondo, ed il prodotto dividerlo pel primo si avranno pel quarto termine miglia 119935403968210347825000000 lunghezza dell' altro braccio, alla di cui estremità doveva Archimede applicare la sua forza. Siccome poi la forza d' Archimede applicata a questa estremità sta in equilibrio col peso della Terra, però, per poco, che questo braccio s' allunghi facendolo per esempio di miglia 119935403968210347825000001, l' estremità di questo braccio cadrà tra le stelle fisse, ed ivi sarà il luogo, che domandava Archimede.

683. Qualora i termini omogenei non siano della medesima spezie devonsi alla stessa spezie ridurre prima di fare l' operazione.

ESEMPIO.

684. Prob. 8. Cercasi quanto tempo impiegheranno due Uomini a votare una vasca d' acqua di barili 2564, che per cavarne barili 142, e boccali 8 impiegano 6. ore.

685. Risol. Si dispongano i termini così 142 . 8 : 2564 : : 6 al quarto, che darà il tempo cercato: Ma perchè il primo dei due termini omogenei 142 . 8, e 2564 ammette diverse spezie, però si riducano tutti due alla stessa spezie, cioè a boccali, avvertendo, che ogni barile contiene 32 boccali; onde il primo termine ridotto a boccali è 4552, ed il secondo è 82048; lo che fatto si dispongano i termini così 4552 : 82048 : : 6, e il quarto, che trovasi essere 108 $\frac{672}{4552}$ dà il tempo, che i detti due Uomini impiegheranno a votare la vasca, il qual tempo è ore 108, e $\frac{672}{4552}$ di ora, cioè giorni 4, ore 12 $\frac{672}{4552}$.

686. Alcune volte questa regola ammette più di tre termini, ed in tal caso o devonsi ridurre i termini dati a tre soli mediante l' opportuna moltiplicazione; o pure non potendosi ciò fare si deve risolvere il Problema con più regole del Tre. Questa poi dicesi regola del Tre composta.

ESEMPIO DEL PRIMO CASO.

687. Prob. 9. Cercasi quanti pesi di fieno vi vorranno a mantenere 70 cavalli per 18 giorni mentre ve ne vogliono 16 pesi a mantenere 5 cavalli per 4 giorni.

688. Risol. Si riduca il Problema a tre termini con moltiplicare primieramente il 70 per 18 = 1260; indi il 5 per 4 = 20, poscia si mettano in proporzione i termini così 20 : 16 : : 1260 al quarto, che trovasi essere 1008 numero cercato de' necessarii pesi di fieno per mantenere 70 cavalli per 18 giorni.

689. La Dim. di questa operazione è evidente, mentre vi vuole tanto fieno a mantenere 70 cavalli per 18 giorni, come a mantenerne 1260 per un giorno; e così a mantenere 5 cavalli per 4 giorni, come a mantenere 20 cavalli per un giorno.

ESEM-

ESEMPIO DEL SECONDO CASO.

690. Prob. 10. In tre mesi con 30 Zecchini si guadagnano 12 lire di frutto: cercasi in quanto tempo con 300 zecchini si guadagneranno 6000 lire.

691. Risol. Essendo ignoto il tempo, in cui con 300 zecchini si devono guadagnare 6000 lire, non si può egli moltiplicare per 300, e conseguentemente non si può ridurre il Problema ad una regola semplice: Egli è pertanto necessario far uso due volte della regola del tre, così

zecchini	lire guadagnate	zecchini	quarto prop. di lire da guadagn.
30 :	12 : :	300 :	120

e così si trova, che 300 Zecchini ne guadagneranno 120 in 3 Mesi, ne' quali 30 Zecchini ne guadagnano 12. Ora per sapere in quanto tempo 300 Zecchini guadagneranno 6000 lire, si farà la seconda regola del tre così

Lire	Mesi	Lire	Quarto proporzionale di Mesi
120	3 : :	6000 :	150

e però con 300. zecchini si guadagneranno di frutto 6000 lire in 150 Mesi, o sia in anni $12\frac{1}{2}$.

692. Istessamente si opererà se la regola composta inchiuderà due regole del tre, una diritta, e l'altra rovescia.

ESEMPIO.

693. Prob. 11. Cinque operaj in 3 settimane scavano 20 pertiche solide di terra; cercasi pertanto quanti operaj dovransi prendere per farne scavare 36 pertiche in 9 settimane.

694. Risol. Si faccia la prima regola del Tre così

Settimane	Pertiche	Settimane	Quarto propor. di Pertiche
3 :	20 : :	9 :	60

dopo si faccia la seconda regola così

Pertiche	Operaj	Pertiche	Quarto propor. di Operaj
60 :	5 : :	36 :	3

onde gli operaj, che soddisfanno al quesito sono 3.

Della Regola di Società.

695. La regola di società consiste in sapere ritrovare la parte proporzionale del guadagno, o della perdita, che ha fatto ciascuno di diversi Mercanti, che si sono uniti in un negozio, in cui non tutti hanno impiegato egual somma di capitale; o pure anche non vi si sono egual tempo fermati.

696. Quanto al primo caso per determinare il guadagno, o la perdita, competente a ciascuno de' Mercanti entrati in negozio, devonsi fare tante regole del Tre quanti sono i Mercanti, delle quali il primo termine deve essere la somma de' capitali, il secondo deve essere il numero, che esprime il guadagno, o la perdita, il terzo poi deve essere ciascuno de' posti capitali, ed il quarto termine darà il guadagno, o la perdita corrispondente a quel tal capitale.

ESEMPIO.

697. Prob. 12. Tre Mercanti si sono uniti in un negozio, il primo ha messo di capitale 600 Filippi; il secondo ne ha messi 800; il terzo 1600: Terminato il negozio hanno trovato di guadagno 2400 Filippi. Cercasi pertanto quanto di guadagno deve toccare a ciascun di loro in ragione del proprio capitale impiegato.

698. Risol. Si operi giusta il num. 695, come qui se ne vede il calcolo.

Capitali

600
800
1600

Somma 3000

Regola prima

3000 : 2400 :: 600
600

3000 | 1440000

Guadagno del primo 480 Filippi

Regola seconda

3000 : 2400 :: 800
800

3000 | 1920000

Guadagno del secondo 640 Filippi

Regola terza

3000 : 2400 :: 1600
1600

3000 | 3840000

Guadagna del terzo 1280 Filippi

699. La Dim. dell' operazione è evidente, perchè i guadagni parziali devono essere proporzionali ai capitali parziali, come lo è tutto il guadagno a tutto il capitale.

700. Se in vece di guadagnare avessero perso devesi nelle regole sostituire la perdita in luogo del guadagno.

701. Quanto al secondo caso l'operazione non differisce in altro, se non che il primo termine delle regole deve essere la somma de' capitali, ognuno de' quali sia moltiplicato nel suo rispettivo tempo, nel tempo cioè, in cui il Mercante, il quale ha impiegato quel tal capitale, è stato in società; e il terzo termine deve essere ciascuno de' capitali moltiplicato pure nel suo tempo.

ESEMPIO.

702. Prob. 13. Quattro Mercanti si sono uniti in società, ed il primo ha messo nel negozio 50 Filippi, ed è stato in compagnia 6 mesi; il secondo ha messo 80 Filippi, e vi è stato 4 mesi; il terzo ne ha messi 130, e vi è stato 11 mesi; il quarto ne ha messi 170, e vi è stato 3 mesi, dopo il qual tempo hanno trovato di aver perso 150 Filippi. Cercasi la perdita, che ha fatto ciascuno.

703.

703. Risol. S' istituiscano quattro regole del Tre nel modo detto, e come qui si vede.

Capitali moltiplicati nel suo tempo

Filippi	50
Mesi	6
Prodotto	300
Filippi	80
Mesi	4
Prodotto	320
Filippi	130
Mesi	11
Prodotto	1430
Filippi	170
Mesi	3
Prodotto	510

	300
	320
	1430
	510
Somma	2560

Regola prima 2560 : 150 :: 300
300

2560 | 45000
Perdita del primo $17\frac{1480}{2560}$

Regola seconda 2560 : 150 :: 320
320

2560 | 48000
Perdita del secondo $18\frac{1920}{2560}$

Regola terza 2560 : 150 :: 1430
1430

2560 | 214500
Perdita del terzo $83\frac{2020}{2560}$

Regola quarta 2560 : 150 :: 510
510

2560 | 76500
Perdita del quarto $29\frac{2260}{2560}$

704. La Dim. di questa operazione si ripeta dal num. *689*.
705. Se in vece di Mesi vi fossero Anni, Mesi, Giorni, in tal caso si deve ridurre il Tempo alla stessa minima spezie, e così ridotto moltiplicarlo ne' rispettivi Capitali.
706. Questa dicesi regola di Società composta.

707. Lo stesso modo di Operare si osserverà ogniqualvolta i Capitali parziali siano espressi con una frazione relativa al Capitale totale.

ESEMPIO.

708. Prob. 14. Tre Mercanti sono entrati in Società, il primo ha messo $\frac{5}{7}$ di tutto il Capitale; il secondo ne ha messo $\frac{2}{3}$; il terzo ne ha messo $\frac{4}{5}$, e alla fine del Negozio hanno trovato di guadagno 2379 Zecchini. Cercasi quanto deve toccare per uno.

709. Risol. Si riducano alla stessa Denominazione le tre date frazioni $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, le quali diverranno $\frac{75}{105}$, $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, la di cui somma è $\frac{229}{105}$, lo che fatto s'istituiscano le tre seguenti regole.

Regola prima $\frac{229}{105} : 2379 :: \frac{75}{105}$, e moltiplicando il secondo termine nel terzo si ha $2379 \times \frac{75}{105} = \frac{178425}{105}$, quale diviso per $\frac{229}{105}$ dà $\frac{\frac{178425}{105}}{\frac{229}{105}} = \frac{178425}{229} = 779\frac{34}{229}$ Zecchini, che ha guadagnato il primo.

Regola seconda $\frac{229}{105} : 2379 :: \frac{70}{105}$, e moltiplicando il secondo termine nel terzo si ha $2379 \times \frac{70}{105} = \frac{166530}{105}$, che, dividendosi pel primo termine $\frac{229}{105}$, dà $\frac{\frac{166530}{105}}{\frac{229}{105}} = \frac{166530}{229} = 727\frac{47}{229}$ Zecchini, che ha guadagnato il secondo.

Regola terza $\frac{229}{105} : 2379 :: \frac{84}{105}$, e moltiplicando il secondo termine nel terzo si ha $2379 \times \frac{84}{105} = \frac{199836}{105}$, che dividendosi pel primo termine $\frac{229}{105}$ dà $\frac{\frac{199836}{105}}{\frac{229}{105}} = \frac{199836}{229} = 872\frac{148}{229}$ Zecchini, che ha guadagnato il terzo.

710. Per provare se nelle istituite regole di Società si è operato a dovere, basta sommare tutti i guadagni, o le perdite parziali trovate, e se questa somma sarà eguale al guadagno, o alla perdita totale, ciò sarà segno, che l'operazione è giusta.

Della regola d' Alligazione.

711. La regola d'Alligazione ha uso per determinare il prezzo di un misto di diversi generi, d'ognuno de' quali sono dati i prezzi; o pure per determinare la quan-

quantità di ciaſcuno dei diverſi generi da meſcolarſi, acciò ſe ne abbia un miſto di un propoſto prezzo.

ESEMPIO DEL PRIMO CASO.

712. Prob. 15. Per formare un certo lavoro dovendoſi meſcolare inſieme 15 libbre di Marcaſſita, di cui ogni libbra coſta 24 lire, e 5 libbre di Ottone, che vale 8 lire alla libbra; cercaſi quale dovrà eſſere il prezzo di ciaſcuna libbra di queſto miſto.

713. Riſol. Si moltiplichi la quantità dell'uno, e dell'altro metallo nel ſuo prezzo, indi ſi ſommino inſieme queſti due prodotti, poſcia ſi divida tale ſomma pel numero delle libbre dei due metalli meſcolati, e il quoziente darà il prezzo, che conviene a ciaſcuna libbra di queſto miſto. Ecco il Calcolo

15	libbre di Marcaſſita	5	libbre di Ottone
24	Prezzo	8	Prezzo
60		Prodotto 40	
30			
Prod. 360			

Numero delle libbre de' due Metalli

Prodotti { 360, 40

Somma 400

20 | 400 Somma

20 Quoziente, che dà il prezzo di ciaſcuna libbra del miſto.

714. Dim. Col moltiplicarſi il numero delle libbre di ciaſcun metallo nel ſuo prezzo ſi ha tutto il prezzo, che compete a ciaſcuna maſſa di Metallo; e però ſe ſi ſommeranno inſieme queſti due prodotti, ſi avrà tutto il prezzo, che conviene alla maſſa dei due dati Metalli meſcolati inſieme; ſe adunque ſi dividerà queſta ſomma per il numero delle libbre, che formano il peſo di tutta la maſſa di queſti due metalli, ſi avrà il prezzo, che compete a ciaſcuna libbra del miſto. Lo che ſi doveva dimoſtrare.

ESEMPIO DEL SECONDO CASO.

715. Prob. 16. Eſſendo date due ſorti di Vino, delle quali il migliore vale 20 lire per miſura, e l'inferiore ne vale 12; cercaſi quanto ſe ne dovrà prendere dell'uno, e dell'altro per averne un miſto, che ſia 1888 miſure, ognuna delle quali coſti 15 lire.

716. Riſol. Si prendano tante miſure del Vino migliore, quante ne indica la differenza, che paſſa tra il prezzo inferiore 12, e il prezzo medio 15, che è 3, e con queſte miſure di Vino migliore ſi meſcolino tante miſure del Vino inferiore, quante ne indica la differenza, che paſſa tra il prezzo maggiore 20, e il prezzo medio 15, che è 5, nel qual modo ſi avrà una miſtura di vino, di cui ogni miſu-

misura costerà 15 lire. Fatto ciò si istituisca una regola del tre, il di cui primo termine sia il numero delle misure di vino misto trovate mediante la poc' anzi fatta operazione, cioè 8; il secondo sia il numero delle misure di vino migliore, che sono entrate in questo misto, cioè 3; e il terzo sia il proposto numero delle misure di vino misto 1888, e il quarto termine sarà il numero delle misure di vino migliore, che devono entrare in tutto il misto, colle quali se si mescoleranno tante misure di vino inferiore, quante se ne ricercano per compiere il numero delle proposte misure 1888, si avrà lo che si cercava. Ecco il Calcolo.

Se in 8. Misure di vino misto entrano 3 Misure di vino migliore; in 1888 quante ve ne entreranno?

8 : 3 :: 1888
1888
8 | 5664
708 misure del vino migliore, che devono entrare nel misto; e perchè per andare a 1888 ne mancano 1180, però alle 708 di vino migliore se ne dovranno mescolare 1180 di vino inferiore a fine di averne un misto di 1888 misure, ognuna delle quali costi 15 lire.

717. Dim. Essendo fissato il prezzo di una certa qualità di roba da vendersi, egli è chiaro, che quanto più denaro si sborserà, tanto più si avrà di tal roba; e all' opposto tanto meno, quanto meno denaro si sborserà. Quindi alla quantità del prezzo essendo proporzionale la quantità della roba, quanto più il prezzo medio fra i prezzi corrispondenti a due cose di valore ineguale si accosterà al prezzo inferiore, tanto minore quantità della roba migliore le si converrà; e pel contrario tanto più dell' inferiore, e *vice versa*; onde per farne un misto corrispondente a questo prezzo; la quantità della roba migliore dovrà essere proporzionale alla differenza, che passa tra il prezzo inferiore, e il prezzo medio; e per l' altra parte la quantità della roba inferiore dovrà essere proporzionale alla differenza, che passa tra il prezzo maggiore, e il prezzo medio. Se adunque le quantità delle due date cose da mescolarsi saranno relative alle dette differenze, al loro misto converrà il fissato prezzo medio. Perchè poi a questa quantità di misto competono tante misure, e non più della roba migliore, così ad un' altra maggiore, o minore quantità di misto competeranno tante misure, e non più, della roba migliore, e però nell' uno, e nell' altro caso il numero delle misure della roba migliore sarà proporzionale alla quantità del misto; per lo che essendo data una certa quantità di misto, a cui convengano tante misure, e non più, di roba migliore per poterlo vendere a un fissato prezzo medio, si avrà il numero delle misure della stessa roba migliore, che competono ad una maggiore, o minore quantità di misto, coll' istituire una regola del tre, il di cui primo termine sia la quantità del misto già trovata; il secondo sia il numero delle misure della roba migliore, che gli convengono; il terzo sia la proposta totale quantità delle misure del misto, mentre il quarto termine sarà il cercato numero delle misure della roba migliore, che a tale quantità di misto competono; onde non altro più rimarrà, che aggiungervi tante misure della roba inferiore, quante vi si richiedono per compiere la cercata intera quantità del misto. Lo che si doveva dimostrare.

718. Dalle cose dette s' intende, che il prezzo del misto deve essere medio tra i prez-

i prezzi delle due cose da mescolarsi, lo che pure si osservi qualora le cose da mescolarsi siano più di due, nel qual caso il modo di operare sarà il medesimo, dovendosi cioè prendere tanta quantità di ciascuna cosa per formarne il primo misto, quanta corrisponde alla differenza de' prezzi, così che della roba migliore se ne prenda tanta, quanta è la differenza fra il prezzo medio, e il prezzo della roba inferiore; e della roba inferiore se ne prenda tanta, quanta è la differenza fra il prezzo medio, e il prezzo della roba migliore: Della roba poi di secondo prezzo se ne deve prendere tanta, quanta è la differenza fra il prezzo medio, e il prezzo della roba, che in ragion di valore tiene il penultimo luogo, e così dell'altre; dopo di che si facciano tanto regole del tre, quante sono le materie da mescolarsi, così che per primo termine vi sia la presa quantità del misto, per secondo ciascuna assunta quantità delle date cose, e per terzo la cercata quantità del misto.

ESEMPIO.

719. Prob. 17. Trattasi di fare un misto di Marcassita, che vale 24 lire la libbra; di Ottone, che vale 8 lire la libbra; di Rame, che vale 14 lire la libbra, e di Stagno, che vale 16 lire la libbra per formare una Statua, quale deve pesare 294 libbre, di cui ognuna deve valere 15 lire. Cercasi la quantità di ciascuno di questi metalli, che deve entrare nel misto.

720. Risol. Si operi nel modo detto al num. 718, e come quì lo mostra il Calcolo.

Marcassita	loro valore	24	differenze	7
Stagno		16		1
Rame		14		1
Ottone		8		9
	Somma delle differenze			18

Se adunque si prenderanno 7 libbre di Marcassita, una di Stagno, una di Rame e 9 di Ottone, si avranno 18 libbre di misto, ognuna delle quali costerà 15. lire Però si faccia

Regola prima.

Se in 18 libbre di misto entrano 7 libbre di Marcassita, in 294 libbre di misto, quante libbre di Marcassita vi dovranno entrare?

$$18 : 7 :: 294$$

$$\begin{array}{r} 294 \\ \hline 18 \,|\, 2058 \\ \hline \text{Quoz. } 114\frac{1}{3} \end{array}$$

quantità della Marcassita, che deve entrare in tutto il misto.

Q Re-

Regola seconda.

Se 18 libbre di misto portano una libbra di stagno, quanto ne porteranno 294 libbre di misto?

18 : 1 :: 294
294

18 | 294
Quoz. $16\frac{1}{3}$ quantità dello Stagno, che deve entrare in tutto il misto.

Regola terza.

Se in 18. libbre di misto entrano 9 libbre di Ottone, quante ne entreranno in 294 libbre di misto?

18 : 9 :: 294
294
18 | 2646
Quoz. 147 quantità dell' Ottone, che deve entrare in tutto il misto.

721. Ho omesso la regola per il Rame, perchè non differisce dalla regola, che si è fatta per lo Stagno.

Se adunque si prenderanno libbre $114\frac{1}{3}$ di Marcassita; $16\frac{1}{3}$ di Stagno; $16\frac{1}{3}$ di Rame, e 147 di Ottone, si avranno 294 libbre di misto, ognuna delle quali costerà 15 lire.

722 Alle volte accade, che i numeri maggiori del prezzo medio non sono tanti, quanti i minori, o *vice versa*; come quando il numero delle cose da mescolarsi è dispari, oppure proposte per esempio sei cose il prezzo medio cade tra la seconda, e la terza, o tra la quarta, e la quinta ec.

E S E M P I O.

Probl. Date 4. qualità d'argento, cioè da lire 18, 16, 14, e 12 l'oncia se ne voglia far un misto, il cui prezzo sia di lire 17. Cercasi però quanto se ne deve prendere di ciascuna sorte.

Ris. Si dispongano i prezzi diversi come al num. 720, poi si paragoni il primo prezzo 18 col medio 17, e la differenza 1 si scriva contro il 12. la differenza 5 tra il 12, e il 17 si scriva contro il 18; e perchè non v'è altro numero al di sopra del medio, fuorchè il 18; però si scriva là sua differenza 1 dal medio contro il 14, e il 16, e le differenze 3, e 1, che passano tra il medio 17, e gli altri due prezzi 14, e 16, si seguitino a scrivere contro il 18. Tutte le differenze poi 5, 3, 1, che si sono scritte contro il 18, si considerino come una sola, che è 9.

Fi-

Finalmente si sommino tutte le differenze, e l'aggregato 12 servirà (giusta il num. 716) di primo termine delle proporzioni, istituite le quali si ricava, che della prima sorte se ne deve prendere $\frac{9}{12}$ d'oncia, della seconda, come della terza, e della quarta $\frac{1}{12}$

	Prezzi diversi			
Prezzo medio 17	18	Differenze	5 + 3 + 1 = 9	Prima Regola che serve pel primo prezzo
	16		1	$12 : 9 :: 1 : \frac{9}{12}$
	14		1	
	12		1	Regola seconda che serve per gli altri 3 prezzi
	Somma delle differenze		12	$12 : 1 :: 1 : \frac{1}{12}$

CAPO IV.

DELLE POTESTA', DELL'ESTRAZIONE DELLE RADICI, E DEL CALCOLO DELLE QUANTITA' RADICALI.

ARTICOLO I.

Dell'origine e natura delle Potestà.

723. DEf. 1. Potestà chiamasi qualunque numero nato dalla moltiplicazione di numeri eguali: come il 4, che nasce dal 2 moltiplicato pel 2; così il 27, i di cui fattori sono 3, 3, 3; istessamente 256, i di cui fattori sono 4, 4, 4, 4 ec.

724. Def. 2. Qualunque numero, in quanto che non si considera prodotto dalla moltiplicazione di numeri eguali, chiamasi prima potestà, o potestà semplice, a riserva dell'unità, che escludesi dall'ordine delle potestà, quantunque però servi come potestà, in quella maniera, che quantunque ella non sia numero, come tale serve nelle operazioni; e però l'unità prendesi per qualsivoglia potestà insieme, e radice.

725. Def. 3. Il prodotto di due numeri eguali, o sia di un numero moltiplicato in se stesso, si dice quadrato, o seconda potestà, il numero poi, da cui è nato tale quadrato, chiamasi la di lui radice quadrata. Come dal moltiplicarsi il 3 in se stesso nasce il 9, che dicesi quadrato, o seconda potestà, e il 3 la di lui radice quadrata, o radice seconda.

726. Corol. Stando adunque (pel num. 495.) l'unità alla radice, come la radice al quadrato, l'unità, la radice, e il quadrato staranno in proporzione continua, e però la radice sarà media proporzionale trà l'unità, e il quadrato.

727. Def. 4. Il prodotto di tre numeri eguali, o sia il prodotto di un numero moltiplicato due volte in se stesso, si dice cubo, o terza potestà, il numero poi, dalla di cui reiterata moltiplicazione è nato il cubo, si chiama la di lui radice

dice cuba, o radice terza: Come dalla moltiplicazione di 3 per 3 per 3 nasce 27, che diceſi cubo, e il 3 ſi dice la di lui radice cuba, o radice terza.

728. Corol. Il cubo adunque naſce dal quadrato moltiplicato nella ſua radice: E perchè (pel num. 495.) ſta l'unità alla radice, come la radice al quadrato, e l'unità alla radice, come il quadrato al cubo, ſtarà pure la radice al quadrato, come il quadrato al cubo, cioè l'unità, la radice, il quadrato, e il cubo ſtaranno in proporzione geometrica continua; e però la radice cuba ſarà la prima di due medie proporzionali tra l'unità, e il cubo.

729. Def. 5. Il prodotto di quattro numeri eguali, o ſia il prodotto di un numero moltiplicato tre volte in ſe ſteſſo ſi chiama quadrato-quadrato, o quarta poteſtà, il numero poi, dalla di cui reiterata moltiplicazione è nato queſto quadrato-quadrato, ſi dice la di lui radice quadrato-quadrata, o radice quarta: Come dalla moltiplicazione di 2 per 2 per 2 per 2 naſce 16, che chiamaſi quadrato-quadrato, o quarta poteſtà, e il 2 ſi chiama la di lui radice quadrato-quadrata, o radice quarta.

730. Corol. Naſce pertanto il quadrato-quadrato dal cubo moltiplicato nella ſua radice: E perchè ſta l'unità alla radice, come la radice al quadrato, e l'unità alla radice come il quadrato al cubo, e finalmente l'unità alla radice, come il cubo al quadrato-quadrato (pel num. 495.), ſtarà pure la radice al quadrato, come il quadrato al cubo, e il quadrato al cubo, come il cubo al quadrato-quadrato, cioè l'unità, la radice, il quadrato, il cubo, e il quadrato-quadrato ſtaranno in proporzione geometrica continua; e però la radice quadrato-quadrata ſarà la prima di tre medie proporzionali fra l'unità, e il quadrato-quadrato.

731. Lo ſteſſo diſcorſo ſi formi del quadrato cubo, o ſia della quinta poteſtà, così della ſeſta, della ſettima ec.

732. Corol. Dalla reiterata moltiplicazione adunque di una quantità in ſe ſteſſa naſcono le poteſtà; e però l'elevare una data quantità ad una dignità propoſta non è altro, che ritrovare un prodotto, il quale riſulti dalla ſteſſa quantità moltiplicata tante volte in ſe ſteſſa, quante ne dimoſtra il grado della poteſtà cercata diminuito di una unità.

733. Def. 6. I numeri, co' quali ſi diſtingue il grado di ciaſcuna poteſtà, ſi chiamano gli eſponenti, o indici delle medeſime poteſtà; e queſti riſpetto alle infinite poteſtà di una ſteſſa radice procedono in continua proporzione aritmetica, laddove le poteſtà, come abbiamo detto, procedono in continua proporzione geometrica.

734. Queſti eſponenti non ſolo indicano il grado di ciaſcuna poteſtà, ma moſtrano eziandio quante volte la data poteſtà debbaſi dividere per la ſua radice per giugnere all'unità; conſeguentemente moſtrano quante volte una meno la radice è ſtata moltiplicata in ſe ſteſſa. A qualunque quantità poi, che non abbia alcun'eſponente, vi s' intende ſempre per eſponente l'unità.

735. L'eſponente ſi ſcrive a deſtra della radice un poco al di ſopra così

$$2^1 = 2$$
$$2^2 = 4$$
$$2^3 = 8$$
$$2^4 = 16$$
$$2^5 = 32$$

2^6

$$2^6 = 64$$
$$2^7 = 128$$
$$2^8 = 256$$
$$2^9 = 512 \text{ ec.}$$

736. All'unità poi si dà per esponente il zero così 1^0, perchè l' unità (pel num. 724.) non forma potenza, e però ella chiamasi quantità elevata a potenza nulla. Si osservi però, che ciò ha luogo solamente nell'espressione generica dell' unità, mentre nella quantità concreta, in cui qualunque quantità potendosi assumere per l'unità, il di lei quadrato, o cubo non sarà già la stessa quantità, ma sarà tale quantità moltiplicata una, o due volte in se stessa, cioè sarà, o il di lei piano, o il di lei solido, per lo che questa unità non devesi confondere con quella, dalla di cui reiterata moltiplicazione è nato tale piano, e tale solido: Di fatto se prenderò un piede per esempio di terreno egli sarà una unità, cioè una certa quantità di terreno di una determinata lunghezza, che si prende per l' unità. Se poi moltiplicherò in se stesso questo piede, o sia questa unità, mi verrà bene di prodotto 1, ma questo 1 sarà un piede piano, o sia una superfizie di terreno quadrata da non confondersi perciò con l'altra unità, o sia con l' altro piede, che è una quantità soltanto lunga ec.

737. Teor. 1. Due quadrati quali si siano stanno fra loro in ragione duplicata delle loro radici; e le radici stanno in ragione sudduplicata de' loro quadrati.

738. Dim. La ragione dei due quadrati si compone dalla ragione delle loro radici presa due volte, in quanto che (pel num. 725.) risultano dalle loro radici moltiplicate in se stesse; ma la ragione composta di due ragioni eguali è duplicata di ciascuna di loro (pel num. 589.), dunque la ragione di due quadrati è duplicata della ragione delle loro radici. Che poi le radici stiano in ragione sudduplicata de' loro quadrati costa dal num. 590.

739. Così i due quadrati 9, 4, le di cui radici sono 3, 2, stanno fra loro in ragione duplicata delle stesse radici, e le radici 3, 2 in ragione sudduplicata de'loro quadrati.

ESEMPIO.

Prob. Dato il nnmero delle oscillazioni, che in un tempo qualunque parimente dato deve fare un Pendolo, cercasi la di lui lunghezza, quale misurasi dal centro del moto, o sia dal punto di sospensione fino al centro della palla oscillante.

Risol. Si osservi, che se due Pendoli fanno le loro oscillazioni in archi simili, i tempi, in cui si fanno queste oscillazioni, stanno in ragione sudduplicata delle lunghezze degli stessi Pendoli; conseguentemente le lunghezze de' Pendoli, che oscillano in archi eguali, stanno in ragione duplicata de' tempi, in cui durano le oscillazioni. In oltre i numeri delle oscillazioni isocrone, o sia equidiuturne, fatte nello stesso tempo da due Pendoli, stanno reciprocamente come i tempi impiegati nelle differenti oscillazioni; e però le lunghezze de' Pendoli, che fanno le loro oscillazioni in piccoli archi simili, stanno in ragione duplicata reciproca de' numeri delle oscillazioni fatte nello stesso tempo. Ciò posto, e premesso ancora, che la lunghezza del

del Pendolo, che oſcilla in un ſecondo di tempo è piedi d'Inghilterra 3, pollici 3 $\frac{3}{10}$: Si voglia, che il pendolo faccia 45 vibrazioni in un minuto, poichè, come pur'ora ſi è detto, le lunghezze de' Pendoli ſtanno fra loro in ragione reciproca duplicata dei numeri delle loro vibrazioni, ſi faccia come il quadrato di 45 (numero delle oſcillazioni, che deve fare il nuovo pendolo), che è 2025 al quadrato di 60 (numero delle oſcillazioni, che in un minuto fa il Pendolo a ſecondi), che è 3600, così pollici 39 $\frac{3}{10}$ (lunghezza del Pendolo a ſecondi) al quarto, che ſarà la cercata lunghezza del nuovo Pendolo.

2025 : 3600 :: 39 $\frac{3}{10}$ al quarto

39 $\frac{3}{10}$

10 | 10800

1080

324

108

2025 | 141480

Quoz. 69 $\frac{1755}{2025}$ che è il quarto termine cercato

12150

19980

18225

Reſiduo 1755

e però la lunghezza del nuovo Pendolo deve eſſere di Pollici 69 $\frac{1755}{2025}$.

Vice verſa Prob. 2. Data la lunghezza di un Pendolo, ſi debba ritrovare il numero delle oſcillazioni, che egli ſarà in un tempo dato.

Riſol. La lunghezza data ſia di pollici 69 $\frac{1755}{2025}$. Queſta lunghezza ſtarà a pollici 39 $\frac{3}{10}$ (lunghezza del Pendolo a ſecondi, che ſerve di norma), come il quadrato di 60 (numero delle oſcillazioni, che fa il Pendolo a ſecondi in un minuto), che è 3600 al quarto termine, la di cui radice quadrata darà il numero delle vibrazioni, che fa il propoſto pendolo in un minuto

$69\frac{1755}{2025} : 39\frac{3}{10} :: 3600$: al quarto

$$\begin{array}{r|l} & 3600 \\ \hline 10 & 19800 \\ \hline & 1080 \\ & 324 \\ & 108 \\ \hline 69\frac{1755}{2025} & 141480 = \frac{286497000}{141480} = 2025 \end{array}$$

, la di cui radice quadrata, come fra poco vedremo è 45, che è il quarto termine cercato: E però il proposto pendolo farà 45 oscillazioni in un minuto.

740. Corol. 1. E però se si daranno due quantità, delle quali la seconda sia dupla della prima, sarà il quadrato della seconda quadruplo del quadrato della prima.

741. Corol. 2. Che se due quantità staranno fra loro in ragione duplicata della ragione, che hanno fra loro due altre quantità, le due prime staranno fra loro come i quadrati delle seconde; e però (pel num. 590.) i piani simili stanno fra loro, come sta quadrato a quadrato; conseguentemente se due quantità staranno fra loro in ragione di numero quadrato a numero quadrato, esse saranno piani simili.

742. Corol. 3. Poichè la prima di tre quantità continue proporzionali sta alla terza in ragione duplicata della prima alla seconda (pel num. 609.), starà la prima alla terza come il quadrato della prima al quadrato della seconda.

743. Corol. 4. Quindi si ha la maniera di ritrovare una quantità, al di cui quadrato stia il quadrato di un'altra quantità data, come stanno fra loro due dati numeri: Per Esempio si debba ritrovare una quantità, al di cui quadrato stia il quadrato di una data quantità 8, come sta 4 ad 1: Per ciò fare si prenda una quantità, a cui stia la data quantità 8, come sta 4 ad 1, e questa sarà 2; ora tra 8, e 2 si prenda un medio proporzionale, che sarà 4, al di cui quadrato (pel num. 742.) starà il quadrato di 8, come 8 a 2, o sia come 4 ad 1.

744. Teor. 2. Se saranno dati due cubi, essi staranno fra loro in ragione triplicata della ragione, che hanno fra se le loro radici; e *vice versa* le radici staranno in ragione suttriplicata della ragione de' loro cubi.

745. Dim. La ragione di due cubi si compone dalla ragione delle loro radici presa tre volte, in quanto che essi risultano (pel num. 727.) dalle loro radici moltiplicate due volte in se stesse, ma la ragione composta di tre ragioni eguali è triplicata di ciascuna di loro (pel num. 591.), dunque la ragione di due cubi è triplicata della ragione delle loro radici. Che poi le radici stiano in ragione suttriplicata de' loro cubi, costa dal num. 592.

746 Così i due cubi 27, 8, le di cui radici sono 3, 2, stanno fra loro in ragione triplicata delle stesse radici 3, 2, le quali stanno fra se in ragione suttriplicata de' loro cubi.

747. Corol. 1. Se adunque due numeri staranno fra loro in ragione triplicata della ragione, che hanno fra loro due altri numeri, i primi numeri staranno fra loro

loro come i cubi de' fecondi; quindi (pel num. 592.) i folidi fimili ftanno fra loro, come un numero cubo a numero cubo, confeguentemente fe due numeri ftaranno fra loro in ragione di numero cubo a numero cubo, effi faranno numeri folidi fimili.

748. Corol. 2. Poichè la prima di quattro quantità continue proporzionali fta alla quarta in ragione triplicata della prima alla feconda, ftarà la prima alla quarta, come il cubo della prima al cubo della feconda.

749. Ifteffamente s'intende, che i quadrato-quadrati ftanno fra loro in ragione quadruplicata della ragione delle loro radici; e *vice verfa* le radici in ragione fuqquadruplicata della ragione de' loro quadrato-quadrati: Così i quadrato-cubi ftanno fra loro in ragione quintuplicata ec.

750. Corol. 1. E però per le cofe dette i prodotti omogenei fimili ftanno fra loro in ragione moltiplicata dei loro fattori omologhi, quale moltiplicazione di ragione fi ripete dal numero de' fattori; o fia ftanno fra loro, come le poteftà dei lati omologhi, delle quali il grado corrifponda al numero delle dimenfione relative de' prodotti fimili. Un prodotto poi fi dice di tante dimenfioni, quanti fono i fuoi fattori. *Vice verfa* fi parli dei fattori.

751. Corol. 2. E perchè le ragioni delle poteftà fi compongono da egual numero di ragioni componenti fimili; cioè i quadrati da due ragioni eguali; i cubi da tre; i quadrato-quadrati da quattro ec., però le poteftà dello fteffo efponente nate da termini continuamente proporzionali fono parimente proporzionali: Come

Radici	2.	4	8.	16.	32.
Quadrati	4.	16.	64.	256.	1024. ec.
Cubi	8.	64.	512.	4096.	32768.

752. Corol. 3. Confeguentemente fe faranno difpofti quanti numeri fi vogliono in continua proporzionalità geometrica, e il primo dopo l'unità fia quadrato, ancora gli altri tutti faranno quadrati; fe farà cubo ancora gli altri faranno cubi, fe farà quadrato-quadrato, ancora gli altri faranno quadrato-quadrati ec.

753. Le poteftà fi chiamano ancora potenze, dignità, e grandezze fcalari.

754. Teor. 3. La ragione duplicata della ragione di numero a numero ha efponenti quadrati; la triplicata ha efponenti cubi ec.

755. Dim. La cofa è evidente, poichè la ragione duplicata componendofi da due ragioni eguali (pel num. 589.), e la ragione compofta avendo per efponente (pel num. 579.) il prodotto degli efponenti delle due ragioni componenti, l'efponente perciò della ragione duplicata, che rifulta dal prodotto di due efponenti eguali, deve effere un numero quadrato (pel num. 725.). Parimente componendofi la ragione triplicata da tre ragioni eguali (pel num. 591.), il di lei efponente (pel num. 579.) rifulterà dal prodotto degli efponenti delle tre ragioni componenti, e però farà un numero cubo (pel num. 723.) ec. Lo che fi doveva dimoftrare.

756. Così l'efponente della ragione 36 : 9, la quale fi compone dalle ragioni 6 : 3, 6 : 3, è 4 numero quadrato; e l'efponente della ragione 216 : 27, la quale fi compone dalle ragioni 6 : 3, 6 : 3, 6 : 3, è 8 numero cubo ec.

757. Corol. Per lo che fe due ragioni di numero a numero faranno eguali, ftaranno fra loro il prodotto degli antecedenti, e il prodotto de' confeguenti come

due

due numeri quadrati: Come essendo 8 : 4 :: 6 : 3, sarà 8X6 = 48 a 4X3 = 12 come due numeri quadrati. Parimente se tre ragioni di numero a numero saranno eguali, il prodotto degli antecedenti starà al prodotto de' conseguenti come due numeri cubi ec.

758. Non riconoscendo alcun limite la moltiplicazione di un numero in se stesso, e quanti sono i numeri tante essere potendo le radici, siccome infiniti sono i numeri, così pure infinite sono le radici, ciascuna delle quali avrà una serie infinita di potestà; non però qualunque numero considerato come una potestà ha la sua radice, essendo infiniti i numeri, che non ne hanno alcuna, e tali sono quelli, che non nascono dalla replicata moltiplicazione di un numero in se stesso, e però non sono potestà perfette.

ARTICOLO II.

Modo di estrarre la radice quadrata da qualunque numero.

759. DEf. 1. Estrarre la radice quadrata da un proposto numero non è altro, che ritrovare quel tal numero, dalla di cui moltiplicazione in se stesso è nato quello, da cui devesi levare la radice.

760. Corol. E perchè (pel num. 726.) la radice quadrata è una media proporzionale tra l'unità, e il suo quadrato, però l'estrarre la radice quadrata non è altro, che tra il proposto numero, e l'unità, trovare una media proporzionale, e *vice versa*.

761. Devesi osservare, che nascendo il quadrato (pel num. 725.) dal moltiplicarsi la sua radice in se stessa, o sia (pel num. 106.) dal sommarsi la stessa radice tante volte, quante unità ella contiene, da una radice pari risulterà sempre per quadrato un numero pari, e da una radice impari deve sempre risultare per quadrato un numero impari. Ogni numero quadrato poi finisce con una di queste cinque figure 1, 4, 5, 6, 9, o pure con due zeri, nel qual caso questi due zeri devono essere preceduti da una delle suddette cinque figure. E ciò serve per conoscere a prima vista se un proposto numero possa, o non possa essere quadrato, non già, che qualunque numero, il quale finisca con una delle anzidette figure sia quadrato, ma perchè non può essere quadrato, se non termina con una di loro.

762. E' da notarsi in secondo luogo, che se con ciascun termine de' numeri naturali si formerà un quadrato, si avrà una serie di quadrati, de' quali le differenze avranno queste due proprietà: La prima, che esse saranno numeri impari; la seconda, che andranno ascendendo in proporzione aritmetica, della quale proporzione l'esponente o denominatore sarà 2, o sia la differenza delle differenze è una quantità costante. Per esempio.

Radici	1.		2.		3.		4.		5.		6.		7.		8.		
Quadrati	1.		4.		9.		16.		25.		36.		49.		64.		ec.
Differenze		3.		5.		7.		9.		11.		13.		15.			
Differenza delle differenze			2.		2.		2.		2.		2.		2.				

763. Ora questi numeri dispari ordinati in proporzione aritmetica, il di cui primo termine sia l'unità così 1. 3. 5. 7. 9. 11. ec. sono la vera sorgente di tutti i numeri quadrati, poichè se, cominciandosi dall' unità si sommeranno quanti

 di

di questi termini si vogliono, la somma sarà sempre un numero quadrato: Come sommandosi 1, 3 si ha 4, che è numero quadrato: Sommandosi 1, 3, 5 si ha 9, che è numero quadrato ec. e così in seguito proseguendosi con quest'ordine a trovare le altre somme, si avranno i quadrati stessi, che si generano per ordine dai numeri naturali.

764. Merita pure riflessione, che dall'aggiungersi una unità al doppio della radice di qualsivoglia numero quadrato, ne risulta la differenza tra detto quadrato, e il prossimo maggiore.

765. Corol. 1. Per lo che dato un quadrato hassi la maniera di trovare immediatamente il quadrato prossimo maggiore, con aggiungere cioè al quadrato dato il doppio della sua radice accresciuto di una unità: Come essendo dato il quadrato 25, la di cui radice è 5, si avrà il quadrato prossimo maggiore 36 con aggiungere 5 + 5 + 1 al dato quadrato 25; e però in questo modo si possono con somma facilità costruire le Tavole de' numeri quadrati.

766. Corol. 2. E perchè le differenze de' numeri quadrati consecutivi procedono in proporzione aritmetica, il di cui esponente è 2, e in oltre con aggiungersi una unità al doppio della radice di qualsivoglia quadrato, ne risulta la differenza tra detto quadrato, e il prossimo maggiore; però se al doppio della radice di un dato quadrato si leverà una unità, si avrà la differenza, che passa tra tale quadrato, e il prossimo minore; conseguentemente se da un dato quadrato si leverà il doppio della sua radice diminuito di una unità, si avrà il quadrato prossimo minore.

767. Dalla sola inspezione dell' Esempio dato al num. 762. apparisce, che ciascuna delle differenze di due quadrati prossimi risulta dalla somma delle loro radici.

768. Corol. E però se tale differenza tra due quadrati prossimi si dividerà in due parti, si avranno due numeri, de' quali uno supererà l'altro di una unità, e il maggiore sarà la radice del quadrato maggiore, e il minore sarà la radice del quadraro minore.

769. La differenza poi fra due quali si siano quadrati è sempre eguale alla somma delle loro radici, quale somma sia moltiplicata nel numero delle unità, per cui distano tali radici; come per 1 se le radici fossero 2, 3; per 2 se le radici fossero 2, 4; per 3 se le radici fossero 2, 5 ec.

770. Def. 2. La radice di qualsivoglia potestà si dice binomia, se costa di due parti unite col segno +, come la radice 4 si può considerare così 1 + 3, o pure 2 + 2. Se costa di tre parti si dice trinomia, come la radice 7, che si può prendere così 1 + 2 + 4, o 2 + 2 + 3; e generalmente se è di più parti si dice moltinomia, o polinomia.

771. Teor. Qualunque quadrato di radice binomia si compone dai seguenti elementi, cioè dal quadrato della prima parte della radice, dal doppio del prodotto della prima parte nella seconda, e dal quadrato della seconda.

772. La Dim. costa dalla stessa operazione di elevare una quantità binomia al quadrato, mentre risultando un quadrato dal moltiplicarsi in se stessa la sua radice (pel num. 725.), nè potendosi altrimenti moltiplicare in se stessa la radice binomia, che con moltiplicare l'una, e l'altra delle sue parti prima per una di tali parti, poi per l'altra, ben si vede, che da tale moltiplicazione risultar deve un prodotto composto primieramente dal prodotto parziale della prima parte in se stessa, o sia dal quadrato della prima parte; in secondo luogo dai prodotti parziali della prima parte nella seconda, e della seconda nella prima, o sia dal doppio

pio

pio del prodotto della prima parte nella seconda; e finalmente dal prodotto della seconda parte moltiplicata in se stessa, o sia dal quadrato della seconda parte. Lo che si doveva dimostrare.

ESEMPIO.

773. Prob. 1. Movendosi un corpo in un fluido, cercasi quale sarebbe la resistenza, che soffrirebbe a motivo della quantità di materia, che deve rimovere, se vi si movesse con una velocità cinque volte maggiore.

774. Risol. Poichè questa resistenza è sempre in ragione del quadrato della velocità, però si alzi al quadrato il 5 supponendolo eguale a $3 + 2$, ed il suo quadrato 25 darà la resistenza cercata.

$3 + 2$ Radice binomia
$3 + 2$

4 Quadrato della seconda parte
6, 6 Prodotti della prima parte nella seconda
9 Quadrato della prima parte

25 Quadrato di tutta la radice $3 + 2$, che dà la resistenza, che soffrirebbe il proposto corpo, se in tale fluido si movesse con una velocità cinque volte maggiore di quella, che ha.

775. Corol. 1. Poichè adunque questi elementi di una quantità comunque divisa in due parti, cioè il quadrato della prima parte, il doppio del rettangolo di una parte nell'altra, e il quadrato della seconda parte, sono eguali al quadrato della quantità intera, sarà (pel num. 45.) la somma dei quadrati delle due parti eguale al quadrato della quantità intera diminuito del doppio del rettangolo di una parte nell'altra, cioè nell'esempio del num. 774. sarà $9 + 4 = 25 - 2 \times 6$.

776. Corol. 2. Siccome per inalzarsi al quadrato una radice binomia, per esempio $3 + 2$ devesi primieramente moltiplicare $3 + 2$ per 3, onde si abbia $9 + 6$, indi si deve moltiplicare $3 + 2$ per 2, con che si ha $6 + 4$, ed in tal caso come sta $3 : 2$, così stando (pel num. 513.) $9 : 6$, e $6 : 4$, sarà $\div 9 . 6 . 4$ nella ragione di $3 : 2$; e però se una data quantità sarà divisa comunque in due parti, il rettangolo compreso da queste due parti sarà un medio proporzionale geometrico tra il quadrato della parte maggiore, e il quadrato della parte minore.

777. Corol. 3. E però fra due quadrati quali si siano cade sempre un medio proporzionale geometrico, il quale è il prodotto delle radici dei dati due quadrati.

778. Corol. 4. Quindi il prodotto, che nasce dal moltiplicarsi un numero quadrato per un numero quadrato, è sempre un numero quadrato, che è eguale al quadrato del prodotto delle radici de' proposti quadrati (pel num. 492.), mentre il prodotto delle radici dei due dati quadrati è medio proporzionale tra gli stessi quadrati. Così il prodotto dei due quadrati 9, 25, di cui le radici sono 3, 5, è $9 \times 25 = 225$, che è uguale al quadrato di 15, cioè $\overline{15}^2 = 225$, essendo 15 il prodotto delle due radici 3, 5.

779. Corol. 5. Quindi tra due piani simili cade un medio proporzionale, avvegnachè (pel num. 741.) essi stiano fra loro in ragione di numero quadrato a numero quadrato: E conseguentemente se fra due prodotti cadrà un medio proporzionale, essi saranno o due quadrati, o due piani simili, ed il loro prodotto sarà un quadrato.

780. Corol. 6. Per lo che i numeri, che stanno in proporzione o dupla, o sesquialtera, o surbiparziente ec., non possono essere numeri quadrati, nè piani simili, poichè fra loro non può cadere un medio proporzionale, conciossiachè la proporzione dupla ne'minimi termini sia 2 : 1; la sesquialtera, la sesquiterza ec. sia fra due numeri differenti di una sola unità; e la surbiparziente si trovi ne'numeri differenti di due unità, fra i quali numeri non può cadere un medio proporzionale, non potendo mai il loro prodotto essere un numero quadrato.

781. Corol. 7. Quando il prodotto di due dati numeri è un quadrato, se uno di detti numeri è quadrato, lo sarà ancora l'altro; e se il prodotto di due numeri non è quadrato, ed uno di loro sia quadrato, l'altro non sarà quadrato.

782. Corol. 8. Pel num. poi 778 se un numero quadrato si potrà dividere esattamente per un numero quadrato il quoziente sarà quadrato: La radice poi di questo quoziente sarà ciò, che nasce dal dividersi la radice del dividendo per la radice del divisore.

783. Si osservi, che in qualunque quadrato di radice binomia, la somma dei quadrati delle parti supera di tanto il doppio del loro rettangolo, quanto è il quadrato della differenza delle medesime parti: Così il quadrato di $3 + 5$ essendo $9 + 30 + 25$, sarà $9 + 25 - 30 = 4$ quadrato di 2, che è la differenza delle due parti 3, 5 della radice.

784. La differenza poi, che passa tra il quadrato nato dal moltiplicarsi in se stessa la somma dei quadrati delle parti, e il quadrato nato dal moltiplicarsi in se stesso il doppio del prodotto di una parte nell'altra, è sempre un numero quadrato, la di cui radice è uguale alla differenza dei quadrati delle parti.

785. Prob. 2. Si debba levare la radice quadrata da un proposto numero.

786. Risol. Se la cercata radice costa di una sola figura (lo che si conosce dal numero delle figure del proposto numero, mentre ordinariamente ne sono tante nel prodotto, quante ne sono nei fattori, o una meno), ella si troverà facilmente mediante la Tavola posta al num. 1000. Se poi ella costa di più figure si faccia così: Si divida in membri il dato numero, separando ogni due figure mediante una virgola, e incominciando a destra, nel qual modo l'ultimo membro a sinistra potrà essere di una sola figura, e con questa operazione si vedrà subito il numero delle figure, che deve avere la radice cercata. Fatto ciò, dall'ultimo membro a sinistra si levi la radice quadrata mediante la Tavola delle Potestà posta al num. 1000., supposto che tal membro sia un quadrato perfetto, che se non è quadrato perfetto, si prenda la radice del quadrato prossimo minore, che si scriva a parte, mentre essa sarà la prima figura a sinistra della cercata radice; indi dal suddetto membro si sottri il quadrato di tale radice, ed il residuo si scriva sotto, a cui si ponga appresso il secondo membro, e questo aggregato diminuito dell'ultima figura a destra si divida pel doppio della trovata radice, ed il quoziente si scriva appresso alla prima trovata figura radicale, poichè egli ne sarà la seconda. Dopo ciò al doppio della prima figura radicale si scriva appresso la seconda figura trovata, e questo aggregato si moltiplichi nella stessa seconda figura radicale, ed il prodotto si sottri dall'aggregato pur ora diviso, indi al residuo, che ne risulta,

ta, si scriva appresso il terzo membro. Questo nuovo aggregato diminuito dell'ultima figura a destra si divida pel doppio della fin'ora trovata radice, ed il quoziente sarà la terza figura radicale da scriversi vicino alle altre due; dopo di che si scriva appresso al doppio delle due prime figure radicali, che servì di divisore, la detta terza figura radicale, e se ne moltiplichi l'aggregato per la stessa terza figura radicale, il di cui prodotto devesi sottrarre dall'aggregato diviso, ed al residuo si scriva appresso il quarto membro, e collo stesso metodo si continui l'operazione fino in ultimo.

787. La Dim. rendesi chiara dall' osservare la genesi del quadrato, vale a dire da quali elementi egli risulta, imperocchè tante essendo, come si è detto, le figure di qualunque radice, quanti sono i membri del suo quadrato, nel di cui primo membro a sinistra contiensi il quadrato della prima figura radicale a sinistra, però per avere tale figura radicale bisogna prendere la radice del quadrato maggiore, che in tale membro si racchiude, posto che egli non sia un quadrato perfetto, nel qual caso oltre il contenere il quadrato della suddetta prima figura radicale, egli conterrà ancora parte del doppio del prodotto della prima figura nella seconda, onde per questo motivo da questo membro devesi sottrare il quadrato della prima figura radicale per averne lo che c'è di più da prefiggersi al secondo membro, nel quale si troverà il secondo elemento del proposto numero quadrato, cioè il doppio del prodotto della prima trovata figura radicale nella seconda, o sia il prodotto del doppio della prima figura radicale nella seconda più il terzo elemento, cioè più il quadrato della seconda figura: Quindi per avere la seconda figura radicale bisognerà dividere pel doppio della trovata prima figura radicale il suddetto aggregato diminuito dell'ultima figura a destra, a motivo che ella non appartiene al secondo elemento, lo che fatto si avrà per quoziente la seconda figura radicale. Siccome poi in questo aggregato oltre il prodotto del doppio della prima figura radicale, nella seconda, più il quadrato della seconda, v'è qualche cosa, che appartiene al quarto elemento (tante si considerano le parti di una radice, quante sono le di lei figure, ed il quadrato di tale radice è composto dai quadrati di ciascuna parte, e dal doppio del prodotto di ciascuna parte in tutte le altre); perciò per averne il di più si deve sottrare da questo aggregato il secondo elemento più il terzo, cioè il prodotto del doppio della prima figura radicale più la seconda nella stessa seconda, indi prefiggere il residuo al terzo membro, nel quale aggregato si troverà il quarto, e quinto elemento del proposto numero quadrato, cioè il doppio del prodotto delle due figure trovate nella terza, o sia il prodotto del doppio delle due figure trovate nella terza, più il quadrato della terza, e però per avere la terza figura radicale bisognerà dividere pel doppio delle due figure fin'ora trovate il detto aggregato diminuito dell'ultima figura a destra a motivo che ella non entra nel prodotto nato dalla moltiplicazione del doppio delle due figure trovate nella terza, ed il quoziente sarà la terza figura radicale: E così in seguito. Lo che si doveva dimostrare.

788. Si noti, che qualora il primo membro a sinistra sarà minore del numero 4, per la prima figura radicale si dovrà scrivere l'unità.

789. Quando dall'aggregato già diviso non si potesse sottrarre il prodotto del doppio delle figure radicali trovate più l'ultima nella stessa ultima, in tal caso devesi tanto diminuire quest'ultima figura radicale, che ne risulti un prodotto tale, che si possa sottrarre.

790. Se il divisore non entrasse nemmeno una volta nel membro diminuito della prima figura a destra, devesi scrivere un zero nel luogo, in cui dovrebbesi scrivere la seguente figura radicale, ed aggiungere poscia al dividendo il seguente membro del quadrato.

E S E M P I O.

791. Prob. 3. Cercasi quanto tempo impiegherà un grave cadente a giugnere dalla superfizie al centro della Terra, la quale distanza si suppone di piedi 19010400, mentre in un minuto percorre 600 piedi, non considerando la resistenza del mezzo.

792. Risol. Poichè gli spazj percorsi da un Grave cadente stanno in ragione duplicata dei tempi nel cadere impiegati, o sia come i quadrati dei tempi, però come sta 600 al quadrato di un minuto, che è 1, così starà 19010400 al quadrato del tempo, che a percorrere questo spazio dal Grave si impiega, cioè

600 : 1 :: 19010400

```
600 | 19010400
    |_________
         31684   Quoz., che dà il quadrato del tempo cercato.
     1800
     ____
      1010
       600
      ____
      4104
      3600
      ____
       5040
       4800
       ____
        2400
        2400
        ____
        0000
```

per avere adunque il tempo cercato non hassi, che a prendere la radice quadrata di questo numero 31684, quale divido in membri così 3, 16, 84, poscia dal primo membro 3, che non è quadrato perfetto, levo la radice del quadraro prossimo inferiore, che è 1, e questa, che deve essere la prima figura della radice, che si cerca, scrivo da parte, lo che fatto sottro il quadrato di 1 dallo stesso membro 3, ed al residuo 2 scrivo appresso il seguente, membro 16, onde ho 216, che diminuito dell' ultima figura a destra resta 21. Ora questo 21 si divida pel doppio della ritrovata radice, cioè per 2, ed il quoziente 10 dovrebbe essere la seguente figura radicale, ma perchè egli costa di due figure quando deve costare di una sola, però si diminuisca di una unità, così che diventi 9, e siccome questo 9 scritto appresso al

al doppio della figura radicale trovata, cioè a 2, onde sia 29, moltiplicato per lo stesso 9 dà un prodotto maggiore di 216, da cui conseguentemente non si può sottrarre, però devesi tanto diminuire, finchè ne venga un prodotto, che si possa sottrarre da 216, lo che si ottiene quando è 7, onde dopo la prima figura 1 si scriva questo 7, che sarà la seconda figura radicale, poscia si scriva presso al 2, che è il doppio della prima figura radicale, questo 7, con che si avrà 27, che moltiplicato per lo stesso 7 dà di prodotto 189, quale si sottri dal 216, ed al residuo 27 si scriva appresso l'ultimo membro 84, per lo che si avrà 2784, e questo aggregato diminuito dell' ultima figura a destra si divida pel doppio della finora trovata radice, cioè per 34, ed il quoziente 8 si scriva appresso l'altre figure radicali; indi si scriva vicino al divisore 34 quest' ultima trovata figura radicale 8, e il provenuto 348 si moltiplichi per lo stesso 8, onde si avrà 2784, che sottratto da 2784, perchè nulla rimane, sarà 178 la radice di 31684. Adunque il suddetto Grave impiegherà in cadere dalla superfizie al centro della Terra 178 minuti, o sia Ore 2, minuti 58.

Primo divisore	2
Primo divisore con la seconda figura radicale	27
seconda figura radicale	7
Prod. primo da sottrarsi	189
Sedondo divisore	34

Numero proposto	3	1 6	8 4
Quadrato inferiore	1		
Residuo e secondo membro	2	1 6	
Doppio della prima figura radicale		2	
Prodotto da sottrarsi	1	8 9	
Residuo, e terzo membro		2 7	8 4
Doppio della radice trovata		3	4
Prodotto da sottrarsi		2 7	8 4
Residuo		0 0	0 0

Radice trovata 178

Secondo divisore con la terza figura radicale	348
Terza figura radicale	8
Secondo prodotto da sottrarsi	2784

793. Ogniqualvolta una proposta quantità non è un quadrato perfetto, non se gli può estrarre la vera radice, e però nell' ultima sottrazione rimane sempre qualche cosa. Si può per altro alla vera radice infinitamente appressare nel modo seguente.

794. Prob. 4. Dato un numero, il quale non sia quadrato si debba ritrovare la di lui radice quasi vera.

795. Risol. Levata la radice del quadrato prossimo minore, che nel dato numero si contiene, si aggiungano all' ultimo residuo alcuni binarj di zeri, quanti si vogliono, e quanti più saranno tanto più si approssimerà alla vera radice; indi si operi giusta il num. 786. trascurando finalmente l' ultimo residuo. Separando poi con un punto queste ultime figure trovate (giusta il num. 314), si avrà una fra-

zio-

zione decimale, che unita alla poc'anzi trovata radice, somministrerà il quasi vero valore della radice cercata.

796. Dim. L'aggiungere al residuo alcuni binarj di zeri egli è lo stesso, che moltiplicare il numero proposto per l'unità accompagnata da altrettanti zeri; ma perchè con questa moltiplicazione si viene a variare il valore del numero dato, però fa di mestieri colla stessa quantità, con cui è stato moltiplicato intenderlo ancora diviso, con che viensi a ridurre il detto numero a frazion decimale (pel num. 326.); ma generalmente frazione quadrata è quella, il di cui numeratore, e denominatore è numero quadrato; dunque per avere la cercata radice quadrata del dato numero devesi ella estrarre tanto dal numeratore, come dal denominatore: Perchè poi il denominatore costa dell'unità accompagnata da un numero pari di zeri, però la di lui radice si può avere esatta, e questo è il perchè si aggiungono i zeri in numero pari, essendo tale radice l'unità accompagnata dalla metà de' zeri aggiunti; ma dal numeratore non si può levare la radice esatta, onde rimane sempre qualche cosa; e siccome a questo avanzo devesi dare per denominatore la trovata radice del denominatore, e quanto più questo denominatore è maggiore, tanto minore risulta tale frazione, però quanti più ambi di zeri si aggiungeranno, tanto minore riescirà il residuo, e conseguentemente si accosterà infinitamente al vero valore della cercata radice. Lo che si doveva dimostrare.

797. Corol. 1. Trattandosi adunque di estrarre la radice quadrata da una frazione decimale espressa a modo d'intero giusta il num. 314, se le figure separate dal punto non sono in numero pari, vi si riducano con aggiungervi un zero a destra, poscia da tutto il numero si estragga la radice quadrata nel modo detto al num. 786, e finalmente si separino con un punto a destra tante figure, quante porta la metà delle già separate da prima.

798. Corol. 2. Che se si dovrà estrarre la radice quadrata da una frazione comune, non altro bisognerà fare che estrarre la detta radice tanto dal numeratore, come dal denominatore, con che si avrà una nuova frazione, che sarà la radice cercata.

799. Molte volte però per conoscere se una data frazione è quadrata, fa di mestieri ridurla a minimi termini (pel num. 228., mentre vi sono alcune frazioni, le quali altrimenti non pajono quadrate, benchè lo siano; come $\frac{8}{18}$ non sembra frazione quadrata, perchè ha il numeratore, e denominatore, che non sono quadrati, ma riducendola a minimi termini così $\frac{4}{9}$ si vede, che ella è quadrata, la di cui radice è $\frac{2}{3}$. Per altro senza ridurre la data frazione a minimi termini si conoscerà se ella è quadrata con moltiplicare insieme il numeratore, e il denominatore, mentre essendo ella quadrata, tale prodotto sarà un quadrato (pel num. 778.): Come nel caso della data frazione $\frac{8}{18}$ si conchiude, che ella è quadrata, perchè moltiplicando insieme il numeratore, e il denominatore si ha 144, che è numero quadrato, la di cui radice è 12; che però la radice quadrata della proposta frazione $\frac{8}{18}$, ritenendo lo stesso denominatore, è $\frac{12}{18}$, e ritenendo lo stesso numeratore è $\frac{8}{12}$, mentre tanto $\frac{12}{18}$, come $\frac{8}{12}$ è uguale a $\frac{2}{3}$ radice quadrata di $\frac{8}{18}$

800. Se si dovrà estrarre la radice quadrata da una quantità intera con frazione, si riduca tutto a frazione (pel num. 240.), poscia si operi giusta il num. 798. Se la frazione, da cui si deve levare la radice quadrata, non sarà quadrata, si riduca primieramente a frazione decimale (pel num. 330.), avvertendo di aggiungere al numeratore i zeri in numero pari, indi si estragga la radice tanto dal numeratore, come dal denominatore, sprezzando finalmente, come cosa di poco momento, l' ultimo residuo.

ESEMPIO DEL NUMERO 794.

801. Prob. 5. Cercasi la ragione del momento, che ha un globo discendendo nell' aria, al momento, che ha discendendo in un fluvido, per Esempio nell' acqua.

802. Risol. Ha dimostrato il Newton nel lib. 2. de' principj matematici della Filosofia naturale al corol. 2. della prop. 38, che la massima velocità, con cui un globo in virtù del suo peso può discendere in un fluido resistente, è la stessa, che può acquistare il medesimo corpo discendendo in un mezzo non resistente per tanto spazio, che stia a $\frac{4}{3}$ del suo diametro, come sta la densità del globo alla densità del fluido. Ora si determini primieramente la densità dell' uno, e dell' altro, con pesare il globo prima nell' aria, poscia nell' acqua pendente da un filo, e stia il primo peso al secondo, come 27 a 12, onde il peso dell' acqua pari in mole al globo sarà come 15, perchè tale è la differenza de' detti pesi, essendo tale il peso di un' eguale volume di acqua, quale è il peso, che nell' acqua perde il globo; e però la densità del grave alla densità dell' acqua starà come $27 : 15$, o sia come $9 : 5$; per lo che facendo $5 : 9 :: \frac{4}{3}$ al quarto, o sia moltiplicando il primo termine per 3, a fine di liberare da questo denominatore il terzo termine, così $15 : 9 :: 4$ al quarto, che trovasi essere $2\frac{2}{5}$, ne segue per l' accennata regola del Newton, che cadendo il detto globo in un mezzo non resistente dall' altezza eguale a $2\frac{2}{5}$ del suo diametro, cioè (supposto tale diametro di 15 linee del Regio piede di Parigi) cadendo dall' altezza di 36 linee, si acquisterà la massima velocità, che possa mai avere cadendo nell' acqua. E perchè un grave cadendo liberamente passa in un minuto secondo piedi di Parigi 15, pollici 1, linee $2\frac{1}{18}$ secondo l' esperienza di Cristiano Ugenio, quindi la massima velocità, che possa acquistare il proposto globo cadendo nell' acqua, starà alla velocità, che si acquista cadendo nell' aria in un secondo, nella ragione sudduplicata di 36 linee a piedi $15 : 1 : 2\frac{1}{18}$, cioè, ridotti questi a linee, di 36 a $2174\frac{1}{18}$, perchè le velocità stanno in ragione sudduplicata degli spazj percorsi. Ma siccome il secondo termine della ragione sudduplicata deve essere $2174\frac{1}{18}$, però per avere il primo termine di questa ragione sudduplicata si faccia uso del metodo dato al num. 799, con prendere cioè la radice quadrata del prodotto di 36 in $2174\frac{1}{18}$, e pa-

ragonarla allo steſſo $2174\frac{1}{18}$. Ora il prodotto di 36 in $2174\frac{1}{18}$ è 78266, la di cui proſſima radice quadrata ſi ritrova così. Levo primieramente la proſſima radice quadrata dal primo membro 7, che trovo eſſere 2, quale ſcrivo da parte, indi ſottro il quadrato di 2 da 7, e mi avanza 3, cui ſcrivo appreſſo il ſeguente membro 82, onde ho 382, che diminuito dell' ultima figura a deſtra 2 divido pel doppio della radice trovata, cioè per 4, e perchè mi viene di quoziente 9, il quale mi dà poſcia un prodotto maggiore di 382, però diminuiſco tanto queſto quoziente 9, finchè mi venga un numero, che mi dia un prodotto minore di 382, lo che mi ſuccede quando egli diventa 7, quindi ſcrivo il 7 per ſeconda figura radicale, poſcia ſcrivo appreſſo il 4, (doppio della prima figura radicale), queſto 7, e mi viene 47, che moltiplico per lo ſteſſo 7, ed il prodotto 329 ſottratto da 382 mi dà di reſiduo 53, cui ſcrivo vicino il ſeguente membro 66, onde ho 5366, che diminuito dell' ultima figura a deſtra 6 divido pel doppio della fin' ora trovata radice, cioè per 54, e mi viene di quoziente 9, che ſcrivo per terza figura radicale dopo il 7; indi appreſſo il 54 ſcrivo queſto 9, con che ho 549, che moltiplico per lo ſteſſo 9, ed il prodotto 4941 ſottratto da 5366 mi laſcia di reſiduo 425; e perchè nel numero propoſto non vi ſono altre figure, però aggiungo vicino a queſto 425 due zeri così 42500, e queſto numero divido poſcia pel doppio della finora trovata radice, che è 558, e mi viene di quoziente 7, che ſcrivo per quarta figura radicale dopo il 9, lo che fatto ſcrivo appreſſo al 558 queſto 7, onde mi viene 5587, che moltiplicato per lo ſteſſo 7 dà di prodotto 39109, che ſottro da 42500, ed al reſiduo 3391 ſcrivo vicino due zeri così 339100, che divido per 5594, (doppio della fin'ora trovata radice), dopo averlo diminuito al ſolito dell' ultima figura a deſtra, ed ho di quoziente 6, che ſcrivo preſſo al 7 come quinta figura radicale, dopo di che ſcrivo appreſſo al 5594 queſto 6 così 55946, che moltiplicato per lo ſteſſo 6 dà di prodotto 335676, quale ſottro da 339100, e mi viene di reſiduo 3424, cui aggiungo due zeri così 342400; ma perchè diminuito dell' ultima figura a deſtra non può eſſere diviſo da 55952 doppio della finora trovata radice, però nella radice ſcrivo un zero dopo il 6, indi al 342400 aggiungo altri due zeri così 34240000, e diminuito dell' ultima figura a deſtra lo divido per 559520 doppio della fin' ora trovata radice, e mi viene di quoziente 6, che ſcrivo dopo il zero per ſettima figura radicale; poſcia al 559520 ſcrivo appreſſo queſto 6, e l' aggregato 5595206 moltiplicato per lo ſteſſo 6 mi dà di prodotto 33571236, che ſottratto da 34240000 laſcia di reſiduo 668764, cui potrebbonſi aggiungere altri zeri, e continuare ancora l' operazione; pure perchè ſi è già ſufficientemente accoſtato al vero valore della cercata radice, però queſto reſiduo ſi traſcura, contentandoſi della trovata radice 279.7606. Quindi la maſſima velocità, che poſſa acquiſtare il propoſto globo cadendo nell' acqua, ſtarà alla velocità, che ſi acquiſta cadendo nell' aria in un ſecondo, come

$279 \cdot 7606$ a $2174\frac{1}{18}$; e però in vigore di tale velocità il detto globo percorrerebbe nell' acqua equabilmente in un minuto ſecondo il doppio ſpazio di 279.7606, che è 559.5212 linee, cioè piedi Regii di Parigi 3, pollici 10, linee 7.5212, intendendoſi in un' acqua quieta, e ſtagnante. Ecco il calcolo.

Nu-

Numero proposto	7	82	66				
Quadrato prossimo minore	4						
Residuo, e secondo membro	3	82					
Doppio della figura radicale trovata	4						
Prodotto da sottrarsi	3	29					
Residuo, e terzo membro		53	66				
Doppio della radice fin'ora trovata		54					
Prodotto da sottrarsi		49	41				
Residuo accresciuto di due zeri		4	25	00			
Doppio della radice fin' ora trovata		5	58				
Prodotto da sottrarsi		3	91	09			
Residuo accresciuto di due zeri			33	91	00		
Doppio della radice fin' ora trovata			55	94			
Prodotto da sottrarsi			33	56	76		
Residuo accresciuto di due zeri, e poi di altri due zeri				34	24	00	00
Doppio della radice fin' ora trovata				55	95	20	
Prodotto da sottrarsi				33	57	12	36
Ultimo residuo, che si trascura					66	87	64

Primo divisore 4

Primo divisore colla seconda figura radicale 47
Seconda figura radicale 7 — Radice trovata 279. 7606

Prodotto primo da sottrarsi 329

Secondo divisore 54

Secondo divisore con la terza figura radicale 549
Terza figura radicale 9

Secondo prodotto da sottrarsi 4941

Terzo divisore 558

Terzo divisore con la quarta figura radicale 5587
Quarta figura radicale 7

Terzo prodotto da sottrarsi 39109

 Quar-

Quarto divifore 5594

Quarto divifore con la quinta figura radicale	55946
Quinta figura radicale	6
Quarto prodotto da fottrarfi	335676

Quinto divifore 55952, con cui non fi può dividere l'aggregato 342400

Sefto divifore 559520

Sefto divifore con la fettima figura radicale	5595206
Settima figura radicale	6
Ultimo prodotto da fottrarfi	33571236

803. Prob. 6. Debbafi levare la radice quadrata da alcune date frazioni feffagefime.

804. Rifol. Si riducano le date frazioni feffagefime alla minima fpezie propofta (pel num. 151.), indi dal numero rifultato fi levi la radice quadrata (pel num. 786.), a cui fi darà per apice la metà dell'apice maffimo delle date frazioni, come fi è fatto nelle frazioni decimali, effendo la ragione la fteffa. Che fe l'apice maffimo delle date frazioni foffe impari, in tal cafo fi riducano all' altra fpezie proffima inferiore, onde l'apice maffimo diventi pari. La dim. è evidente per le cofe dette. Si debba per Efempio levare la radice quadrata da fegni 2 gradi 25, 37', 9'' 42'''. Per ciò fare dovrebbefi prima ridurre tutto a terzi, ma perchè queft'apice è impari, però fa di meftieri ridurre tutto a quarti, onde ne vengono 1109526920'''', da cui levando la radice quadrata vi fi deve pofcia dare l'apice ''. Se non fi può eftrarre la radice efatta fi riducano le frazioni feffagefime ad una frazione decimale (giufta il num. 382. §. Qualora), indi fi operi come fi è detto ne'decimali.

805. Prob. 7. Debbafi levare la radice quadrata da un numero compofto di diverfe fpezie.

806. Rifol. Riducafi tutto alla minima fpezie (pel num. 151.), pofcia dal numero rifultato fi levi al folito la radice quadrata, quale poi devefi ridurre alle fpezie fuperiori (pel num. 155.).

Se inalzando al quadrato la radice trovata ne rifulterà la quantità propofta, ciò farà fegno, che l'operazione fu fatta bene.

ARTICOLO III.

Modo di eftrarre la radice cuba da qualunque numero.

807. DEF. Eftrarre la radice cuba da un dato numero non è altro (pel num. 727.) che ritrovare quel numero, il quale moltiplicato due volte in fe fteffo produce il numero dato.

808. Si osservi, che se con ciascun termine de' numeri naturali si formerà la terza potestà, si avrà una serie di cubi, nella quale la differenza tra l'uno, e l'altro cubo prossimo maggiore, e minore sarà un numero impari. Le differenze poi di queste differenze, o sia le differenze seconde procederanno in proporzione aritmetica; conseguentemente le differenze delle differenze delle differenze, o sia le differenze terze saranno una quantità costante, che è *6*. Ecco l'Esempio.

Radici	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Cubi	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.
Differenze prime	7.	19.	37.	61.	91.	127.	169.	
Differenze seconde	12.	18.	24.	30.	36.	42.		
Differenze terze	6.	6.	6.	6.	6.			

809. Le differenze dei numeri cubi nati da ciascun termine della serie naturale presa nel modo anzidetto, e di cui il primo termine sia l'unità, così 1. 7. 19. 37. 61. 91. 127. ec. sono la vera sorgente di tutti i numeri cubi, poichè se cominciandosi dall'unità si sommeranno quanti di questi termini si vogliono, la somma sarà sempre un numero cubo: Come sommandosi 1, 7, si ha 8, che è numero cubo; sommandosi 1, 7, 19 si ha 27 numero cubo; sommandosi, 1, 7, 19, 37 si ha 64 numero cubo ec.

810. Che se per ordine si sommeranno i numeri naturali, indi si moltiplichi ciascuna somma per *6*, che è la differenza costante, e al prodotto si aggiunga una unità, si avranno per ordine tutte le differenze, che cadono fra ciascun cubo nato dalla serie de' numeri naturali: come moltiplicandosi 1 per *6*, e al prodotto aggiungendosi 1, si avrà 7, che è la differenza fra l'unità, e il primo cubo 8. Sommandosi 1, 2, si avrà 3, che moltiplicato per *6*, ed il prodotto accresciuto di una unità, dà 19 differenza tra il primo cubo 8, e il secondo 27. ec.

811. Corol. 1. Quindi si vede, che la differenza fra un cubo, e il prossimo maggiore consiste nel triplo del quadrato della radice del cubo minore, più il triplo, di tale radice accresciuto di una unità: Per Esempio la differenza 19 tra il cubo 8, e il cubo 27 risulta da 12 triplo del quadrato della radice 2 del cubo minore 8, più *6* triplo della stessa radice, più 1.

812. Corol. 2. Essendo pertanto dato un cubo, e volendosi il cubo prossimo maggiore, non altro deveii fare, che aggiungere al dato cubo il triplo del quadrato della sua radice, più il triplo della stessa radice, più una unità: Onde con questo metodo si potranno costruire con facilità le Tavole de' numeri cubi.

813. Che se da qualsivoglia differenza data, che passa fra due cubi, si leverà tante volte il *6*, quante unità contiene la radice del cubo minore, si avrà la differenza prossima minore: Come se dalla differenza *61*, che passa tra i due cubi *64*, 125, si leverà tante volte il *6*, quante indica la radice 4 del cubo minore, si avrà 37, che è la differenza prossima minore, che passa tra il cubo *64*, e prossimo minore 27.

814. E *vice versa* se a qualsivoglia differenza, che passa fra due cubi, si aggiungerà tante volte il *6* quante unità contiene la radice del cubo minore, si avrà la differenza prossima maggiore.

815. Considerando la cosa per altra parte si trova, che la differenza esistente fra due quali si siano cubi è sempre uguale alla somma dei quadrati delle loro ra-

radici, più la somma delle stesse radici, più il numero delle unità, per cui distano le stesse radici, e il tutto moltiplicato per lo stesso numero delle unità per cui distano tali radici: Onde la differenza, che passa tra i cubi di 2, e di 4 è $\overline{4 + 16 + 2 + 4 + 2} \times 2 = 56$.

816. Teor. Qualunque cubo di radice binomia si compone dai seguenti elementi, cioè dal cubo della prima parte; dal triplo del quadrato della prima parte moltiplicato nella seconda; dal triplo del quadrato della seconda parte moltiplicato nella prima; e finalmente dal cubo della seconda parte.

817. La Dim. rendesi evidente dall'osservare il modo, con cui si forma il cubo; Pel num. 728. qualunque numero cubo risulta dal moltiplicarsi il quadrato nella sua radice; ma (pel num. 771.) il quadrato di radice binomia si compone dai quadrati delle parti, e dal doppio del prodotto di una parte nell' altra; dunque perchè il cubo risulta dal moltiplicarsi questi elementi per la prima, e per la seconda parte della radice, egli devesi comporre dal cubo della prima parte; dal triplo del prodotto del quadrato della prima parte nella seconda, o sia dal triplo del quadrato della prima parte moltiplicato nella seconda; dal triplo del quadrato della seconda parte moltiplicato nella prima, e finalmente dal cubo della seconda parte. Lo che si doveva dimostrare.

E S E M P I O.

818. Prob. 1. Cercasi quale sarà il volume di un piccolo globetto d'acqua, che per l'attività del calor del Sole si è dilatato in maniera, che ha acquistato un diametro 18 volte maggiore.

819. Risol. Poichè le sfere stanno fra loro in ragione triplicata de' diametri, s'innalzi al cubo il numero 18, e ciò, che ne verrà, darà il volume cercato. Tale numero 18 si supponga però un binomio così 11 + 7

Radice { 11 + 7
 11 + 7

49 quadrato della parte seconda
77 } prodotti della parte prima nella seconda
77
121 quadrato della prima parte

324 quadrato della radice 11 + 7

e però il volume del detto globetto d'acqua dilatato è 5832 volte maggiore di prima.

820. Corol. 1. Siccome per innalzare al cubo una quantità binomia, per Esempio 2 + 3 devonsi moltiplicare gli elementi del suo quadrato 4, 6, 6, 9 prima per 2, onde si ha 8 : 12 :: 12 : 18 in ragione di 2 : 3 (pel num. 776.), indi per 3, con che si ha 12 : 18 :: 18 : 27 in ragione di 2 : 3 (per lo stesso num.); quindi sarà 8 : 12 : 18 : 27, cioè il cubo della prima parte, il prodotto del quadrato della prima parte moltiplicato nella seconda, il prodotto del quadrato della seconda moltiplicato nella prima, e il cubo della seconda staranno fra loro nella stessa ragione di 2 : 3

821. Corol. 2. Conseguentemente fra due cubi cadono due medii proporzionali in ragione delle radici di tali cubi; e siccome il prodotto di questi due medii proporzionali è un numero cubo; e di quattro quantità in proporzione essendo il prodotto delle estreme uguale al prodotto delle medie (pel num. 488.), sarà il prodotto di due cubi un numero cubo, la di cui radice sarà il prodotto delle radici dei dati cubi.

822. Corol. 3. E però tra due solidi simili cadono due medii proporzionali. In oltre quando il prodotto di due dati numeri è un cubo, se uno de' numeri dati sarà un cubo, lo sarà ancora l'altro; ma se uno non è cubo, non lo sarà nemmen l'altro: Che se il prodotto di due numeri non è un cubo, ed uno di tali numeri sia cubo, l'altro non lo sarà.

823. Corol. 4. Ogniqualvolta un numero cubo si potrà dividere esattamente per un numero cubo, il quoziente sarà un numero cubo; la radice poi di questo cubo sarà ciò, che nasce dal dividersi la radice del dividendo per la radice del divisore.

824. Prob. 2. Da un dato numero si debba levare la radice cuba.

825. Risol. Se la cercata radice costa di una sola figura ella si troverà mediante la Tavola posta al num. 1000. Se poi ella costa di più figure, si faccia così. Si divida in membri il numero dato col separarne le figure a tre a tre mediante una virgola, cominciando a destra, nel qual modo ciascun membro coste-

rà

rà di tre figure, a riserva dell' ultimo a finistra, il quale potrà essere anche di una figura, o di due. Quanti poi saranno i membri, altrettante saranno le figure della cercata radice. Fatto questo si trovi (mediante la Tavola posta al num. 1000.) la radice cuba del primo membro a finistra; che se egli non sara cubo perfetto, si prenda la radice del cubo prossimo minore, quale si scriva a parte, che sarà la prima figura della radice cercata: Ora dal suddetto membro si sottri il cubo di questa figura radicale, e al residuo si scriva appresso il seguente membro, con che si avrà un aggregato, il quale diminuito dell ultima figura a destra si dovrà dividere pel triplo del quadrato della ritrovata figura radicale sommato col triplo della stessa figura (in maniera però, che nel formare tale somma le figure dell' unità dell' uno, e dell' altro numero da sommarsi non cadano una sotto all' altra, ma l' ultima figura del triplo della radice cada più in fuori di un posto), e il quoziente darà la seconda figura radicale da scriversi dopo la prima. Si moltiplichi poscia questa seconda figura radicale nel triplo del quadrato della prima, indi la prima nel triplo del quadrato della seconda, finalmente si formi il cubo della seconda figura radicale, e queste tre quantità si sommino insieme nella maniera poc' anzi detta, così che l' ultima figura del prodotto della prima figura nel triplo del quadrato della seconda resti più in fuori di un posto dell' ultima figura a destra del prodotto della seconda figura nel triplo del quadrato della prima, e parimente l' ultima figura a destra del cubo della seconda figura radicale resti ancora un posto più in fuori dell' ultima figura a destra del prodotto della prima figura radicale nel triplo del quadrato della seconda, e questa somma si sottri dal membro poc' anzi diviso; indi al residuo si aggiunga appresso il susseguente membro del numero dato, e questo aggregato diminuito dell' ultima figura a destra si divida pel triplo del quadrato della radice fin' ora trovata sommato nel modo detto col triplo della stessa radice, e il quoziente darà la terza figura radicale cercata; poscia da questo membro diviso si sottri l' aggregato del prodotto di quest' ultima figura radicale nel triplo del quadrato delle due prime, del prodotto del quadrato della terza nel triplo delle due prime, e del cubo della stessa terza figura radicale sommati nel modo già detto. Collo stesso metodo poi si continui l' operazione fino in ultimo.

826. La Dim. dell' operazione rendesi manifesta osservando da quali elementi risulta il cubo, mentre essendo che nel primo membro a finistra contiensi il cubo della prima figura radicale a finistra, però per aver tale figura radicale devesi prendere la radice del cubo maggiore, che in tale primo membro si contiene (posto, che egli non sia un cubo perfetto), mentre non essendo egli un cubo perfetto oltre il contenere il cubo della suddetta figura radicale, conterrà ancora parte dei prodotti del triplo del quadrato della prima figura radicale nella seconda, e del triplo della prima nel quadrato della seconda; per lo che dal primo membro devesi sottrarre il cubo della prima figura radicale trovata per averne lo che c' è di più da prefiggersi al secondo membro, nel quale aggregato si troverà il triplo del quadrato della prima figura radicale moltiplicato nella seconda, in oltre il prodotto del triplo della prima figura nel quadrato della seconda, e finalmente il cubo della seconda: Quindi per avere la seconda figura radicale bisogna dividere tale aggregato diminuito dell' ultima figura a destra (a motivo, che ella non appartiene ai prodotti del triplo del quadrato della prima figura radicale nella seconda, e del triplo della prima nel quadrato della seconda) pel triplo del quadrato della prima figura radicale accresciuto del triplo della stessa figura nel modo detto; lo

che

che fatto devesi sottrarre dall'aggregato diviso quanto è concorso a formarlo, cioè il triplo del quadrato della prima figura radicale moltiplicato nella seconda, più il triplo della prima moltiplicato nel quadrato della seconda, più in oltre il cubo della seconda, onde averne il residuo da prefiggersi al terzo membro, nel quale nuovo aggregato inchiuderansi i poc'anzi detti elementi, e perciò l'operazione deve essere la medesima di quella che si è or'ora praticata, nel qual modo si avrà la terza figura radicale, e così di seguito. Lo che si doveva dimostrare.

827. Se dopo avere ritrovato quel numero, il quale si deve sottrarre dal membro totale, non si potrà fare la sottrazione, avvegnachè tal numero sia maggiore, in tal caso si deve scemare la ritrovata figura radicale, e farla tanto minore, onde il nuovo prodotto sottrarre si possa dal membro totale.

828. Può ancora accadere, che il ritrovato divisore non entri neppure una volta nel membro totale diminuito dell'ultima figura a destra, nel qual caso devesi scrivere un zero nel luogo della seguente figura radicale; indi a canto a tale membro totale devesi scrivere il seguente membro; che se neppure in tale aggregato entrasse il divisore, si scriverà un zero per l'altra figura radicale seguente, poscia a questo aggregato si aggiungerà il susseguente membro, finchè si possa fare la divisione.

829. Quando nell'ultimo membro a sinistra si ritrova un sol numero, e questo minore di 8, devesi scrivere 1 per la prima figura radicale, indi sottrarre 1 dallo stesso primo membro.

830. Qualora avanza qualche cosa dall'ultima sottrazione, ciò nasce, perchè il proposto numero non è un cubo perfetto, di cui conseguentemente non si può avere la giusta radice cuba, abbenchè vi si possa infinitamente accostare; per accostarvisi però si devono aggiungere all'ultimo residuo alcuni terni di zeri, e quanti più saranno questi terni, tanto più si accosterà al vero valore della cercata radice, indi devesi continuare l'operazione al solito, trascurando poi l'ultimo residuo, e nella radice, che verrà devonsi separare con un punto a destra tante figure, quante ne indica il numero de'terni aggiunti. La dimostrazione di questa operazione è evidente, mentre coll'aggiungere al proposto numero alcuni terni di zeri, si viene egli a ridurre a frazione decimale, ma da una frazione si leva la radice cuba con levarla tanto dal numeratore, come dal denominatore, e levandola dal denominatore resta l'unità accompagnata da tanti zeri, quanti erano i terni aggiunti, quindi è, che nella radice trovata devonsi separare con un punto tante figure a destra, quanti sono stati i terni aggiunti.

ESEMPIO.

831. Prob. 3. Si cerca quanto sia per aumentarsi l'altezza di un Fiume orizzontale, o quasi orizzontale a motivo dell'acqua, che egli riceve da un Influente.

832. Risol. Primieramente si determini la quantità d'acqua, che porta ciascun di loro, la quale quantità d'acqua sta in ragione composta della velocità, della larghezza, e dell'altezza del fiume; la velocità poi ne'fiumi orizzontali, o quasi orizzontali è in ragione dimezzata, o sia sudduplicata dell'altezza. Sia pertanto la larghezza dell'influente 247 piedi Regii di Parigi, e la sua altezza piedi 16, la di cui radice quadrata è 4, che dà la velocità: Onde moltiplicando insieme questa velocità, l'altezza, e la larghezza, si avrà $4 \times 16 \times 247 = 15808$, che è la quantità dell'acqua, che porta l'Influente. Sia poi la larghezza del Recipiente 873 pie-

piedi, e la sua altezza piedi 25, la di cui radice quadrata è 5, che esprime la velocità; per lo che moltiplicando insieme questa velocità, l'altezza, e la larghezza, si avrà $5 \times 25 \times 873 = 109125$, che è la quantità d'acqua, che porta il Recipiente. Ciò fatto si sommino insieme queste due quantità d'acqua, e si avrà 124933, la di cui radice cuba è 49 . 991, e di questa radice cuba il quadrato è 2499 . 100081. La radice cuba poi della quantità d'acqua 109125 del Recipiente è 47 . 786, il di cui quadrato è 2283 . 501796. Si faccia ora questa proporzione, come il quadrato 2283 . 501796 al quadrato 2499 . 100081, così il 25 altezza del solo Recipiente al quarto, che trovasi essere piedi 27, pollici 4, linee 3 $\frac{511679289}{570875449}$ altezza cercata de' Fiumi uniti, o sia altezza, che avrà il Recipiente accresciuto dell'acque dell' Influente. Ecco tutto il Calcolo.

Larghezza dell' Influente	247
Sua altezza	16
	1482
	247
Prodotto	3952
Velocità dell' Influente	4
Quantità d'acqua dell' Influente	15808

Larghezza del Recipiente	873
Sua altezza	25
	4365
	1746
Prodotto	21825
Velocità del Recipiente	5
Quantità d'acqua del Recipiente	109125

Quantità d' acqua dell' Influente	15808
Quantità d' acqua del Recipiente	109125
Somma	124933

da cui devesi estrarre la radice cuba.

Nu-

Numero proposto	124|933|
Cubo prossimo minore	64
Residuo e secondo membro	60|933
Divisore	49|2
Prodotto da sottrarsi	53|649
Residuo accresciuto di tre zeri	7|284|000
Divisore	7|217|7
Prodotto da sottrarsi	6|602|499
Residuo accresciuto di tre zeri	681|501|000
Divisore	747|152|7
Prodotto da sottrarsi	673|515|999
Residuo accresciuto di tre zeri	7|985|001|000
Divisore	7|497|150|27
Prodotto da sottrarsi	7|497|150|271
Ultimo residuo, che si trascura	487|350|729

Radice cuba trovata 49·991

Triplo del quadrato della prima figura radicale 4 - - - - - - -	48
Triplo della stessa prima figura radicale	12
Primo divisore	492

Triplo del quadrato della prima figura radicale nella seconda 48×9=	432
Triplo del quadrato della seconda figura radicale nella prima 243×4=	972
Cubo della seconda figura radicale	729
Prodotto primo da sottrarsi	53649

Triplo del quadrato delle due prime figure radicali 49 - - - -	7203
Triplo delle stesse due prime figure radicali	147
Secondo divisore	72177

Triplo del quad. delle due prime fig. rad. nella terza 7203×9=	64827
Triplo del quadrato della terza figura radicale nelle due prime 243×49=	11907
Cubo della terza figura radicale	729
Prodotto secondo da sottrarsi	6602499

Triplo del quadrato delle tre prime figure radicali 499 - - - - 774003
Triplo delle ſteſſe tre prime figure radicali 1497

Terzo diviſore 7471527

Triplo del quad. delle tre prime figure radicali nella quarta 747003 X 9 = 6723027
Triplo del quad. della quarta figura radicale nelle tre prime 243 X 499 = 121257
Cubo della quarta figura radicale 729

Prodotto terzo da ſottrarſi 673515999

Triplo del quadrato delle quattro prime figure radicali 4999 - - 74970003
Triplo delle ſteſſe quattro prime figure radicali 14997

Quarto diviſore 749715027

Triplo del quadrato delle 4 prime figure radicali nella quinta 74970003 X 1 = 74970003
Triplo del quadrato della quinta figura radicale nelle 4 prime 3 X 4999 = 14997
Cubo della quinta figura radicale 1

Prodotto quarto da ſottrarſi 7497150271

Radice cuba trovata { 49.991
49.991

```
     49991
   449919
  449919
 449919
199964
```

Suo quadrato 2499.100081

Quantità d' acqua del Recipiente 109125, da cui deveſi eſtrarre la radice cuba.

Nu-

Numero propoſto	109	125			
Cubo proſſimo minore	64				
Reſiduo e ſecondo membro	45	125			
Diviſore	49	2			
Prodotto da ſottrarſi	39	823			
Reſiduo accreſciuto di tre zeri	5	302	000		
Diviſore	6	641	1		
Prodotto da ſottrarſi	4	708	333		
Reſiduo accreſciuto di tre zeri		593	667	000	
Diviſore		682	730	1	
Prodotto da ſottrarſi		546	985	952	
Reſiduo accreſciuto di tre zeri		46	681	048	000
Diviſore		68	489	285	4
Prodotto da ſottrarſi		41	097	871	656
Ultimo reſiduo, che ſi traſcura		5	583	176	344

Radice cuba trovata 47·789

Triplo del quadrato della prima figura radicale 4 - - - - - - -	48
Triplo della ſteſſa prima figura radicale	12
Primo diviſore	492
Triplo del quad. della prima fig. rad. nella ſeconda 48X7 =	336
Triplo del quad. della ſeconda fig. rad. nella prima 147X4 =	588
Cubo della ſeconda figura radicale	343
Prodotto primo da ſottrarſi	39823
Triplo del quad. delle due prime figure radicali 47 - - - - -	6627
Triplo delle ſteſſe due prime figure radicali	141
Secondo diviſore.	66411
Triplo del quad. delle due prime fig. rad. nella terza 6627X7 =	46389
Triplo del quad. della terza fig. rad. nelle due prime 147X47 =	6909
Cubo della terza figura radicale.	343
Prodotto ſecondo da ſottrarſi	4708333

Tri-

Triplo del quad. delle tre prime figure radicali	477 . . .	682587
Triplo delle stesse tre prime figure radicali		1431
Terzo divisore		6827301
Triplo del quad. delle tre prime figure radicali nella quarta	682587 X 8 =	5460696
Triplo del quadrato della quarta figura radicale nelle tre prime	192 X 477 =	91584
Cubo della quarta figura radicale		512
Prodotto terzo da sottrarsi		546985952
Triplo del quad. delle quattro prime fig. radicali	4778 . .	68487852
Triplo delle stesse quattro prime figure radicali		14334
Quarto divisore		684892854
Triplo del quad. delle quattro prime figure radicali nella quinta	68487852 X 6 =	410927112
Triplo del quad. della quinta figura radic. nelle quattro prime	108 X 4778 =	516024
Cubo della quinta figura radicale		216
Prodotto quarto da sottrarsi		4109787165 6

Radice cuba trovata { 47.786
{ 47.786

```
         286716
        382288
       334502
      334502
     191144
     ----------
Suo quadrato  2283.501796
```

Si dispongano ora le quantità trovate in proporzione, e si trovi il quarto proporzionale così

2283501796 : 2499100081 : : 25 : al quarto
25
12495500405
4998200162

Divisore 2283501796 | 62477502025 prodotto da dividersi
Quoz. di piedi. 27
4567003592
16807466105
15984512572
822953533 Res. che moltiplico per 12, onde avere il quoziente di pollici
12
1645907066
822953533

Divisore 2283501796 | 9875442396 prodotto da dividersi
Quoz. di pollici 4
9134007184
741435212 Res. che moltipl. per 12, onde avere il quoziente di linee
12
1482870424
741435212

Divisore 2283501796 | 8897222544 prodotto da dividersi
Quoz. di linee 3
6850505388

Ultimo residuo. 2046717156

E però la nuova altezza del Recipiente dopo l' aumento dell' acque dell' Influente sarà di piedi 27, pollici 4, linee $3\frac{2046717156}{2283501796} = \frac{511679289}{570875449}$.

833. Corol. 1. dovendosi pertanto estrarre la radice cuba da una semplice frazione decimale dovrassi nella radice trovata separare a destra con un punto tante figure, quante ne corrispondono al terzo delle figure, che erano separate col punto nella frazione proposta. E però se il numero delle figure separate col punto nella data frazione non sarà tale, che si possa dividere per 3, in tal caso devonsi aggiungere alla detta frazione uno, o due zeri, onde ne risulti un numero di figure

pure divisibile per 3: Ne questo aumento di zeri altera punto la frazione, mentre non si possono aggiungere al numeratore senza aggiungerli ancora al denominatore, e (pel num. 227.) la frazione sussiste la stessa qualora si aumenti egualmente il numeratore, e il denominatore.

834. Corol. 2 Quindi s'intende per qual ragione nel volersi accostare al vero valore di una radice cuba siasi ordinato di aggiungere i zeri a tre a tre (al num. 830.)

835. Intanto ho detto al num. 830, che da una frazione si leva la radice cuba con levarla tanto dal numeratore, come dal denominatore, perchè frazione cuba è quella, il di cui numeratore, e denominatore sono numeri cubi. Molte volte per conoscere se una frazione è cuba, bisogna ridurla a minimi termini. (pel num. 228.) avvegnachè vi siano molte frazioni, che quantunque siano cube, pure non lo sembrano, come $\frac{24}{81}$, che in tal modo non sembra frazione cuba, perchè il numeratore, e il denominatore non sono numeri cubi, ma riducendola a minimi termini si ha $\frac{8}{27}$ frazione cuba, la di cui radice cuba è $\frac{2}{3}$.

836. Per iscorgere poi immediatamente se una proposta frazione è cuba, si osservi, che ogni frazione cuba è tale, che moltiplicando il numeratore pel quadrato del denominatore, o il denominatore pel quadrato del numeratore, il prodotto è sempre un numero cubo: Per esempio si conosce, che questa frazione $\frac{24}{375}$ è cubica, perchè moltiplicando il numeratore 24 per 140625 quadrato del denominatore si hà 3375000 numero cubo, la di cui radice è 150: O pure moltiplicando il denominatore per 576 quadrato del numeratore 24 si ha 216000 numero cubo, la di cui radice è 60; e in tal caso la radice cuba della proposta frazione sarà $\frac{150}{375}$ ritenendo lo stesso denominatore, o pure $\frac{24}{60}$ ritenendo lo stesso numeratore, poichè l'una, e l'altra di queste frazioni è eguale a $\frac{2}{5}$ radice cuba di $\frac{24}{375}$, o sia $\frac{8}{125}$.

837. Se si dovrà levare la radice cuba da un'intero, e rotto, si riduca tutto in rotto (pel num. 240.) indi da tale rotto si levi, come pur ora si è detto, la radice cuba.

838. Se la frazione, da cui devesi levare la radice cuba, non sarà frazione cuba, si riduca ella primieramente a frazione decimale (pel num 329.), avvertendo di aggiungere al numeratore i zeri a tre a tre per la ragione poc'anzi detta, indi da tale frazione decimale si levi la radice cuba, sprezzando finalmente l'ultimo residuo, in quanto che è reso infinitamente piccolo, e tale radice sarà la radice quasi vera della data frazione.

839. Lo stesso modo di operare, che si è osservato nell'estrarre la radice cuba dalle frazioni decimali, si tiene ancora per estrarre la radice cuba dalle frazioni sessagesime; mentre ridotte prima all'ultima spezie, dal provenuto numero si leva la radice cuba (giusta il num. 825.), poscia alla ritrovata radice si dà per apice la terza parte dell'apice massimo della frazione proposta: Come dovendosi levare la radice cuba da gradi 27. 55'. 3''. 44'''. 21''''. 6'''''. 1'''''', si riducano tutte queste frazioni a sesti, e si avranno 130252845996 1'''''', da cui levandosi giusta il num. 825

825. la radice cuba si ha 10921, a cui devesi dare per apice la terza parte dell' apice massimo 6, cioè 2 così 10921″, quali mediante la replicata divisione per 60 si ridurranno a gradi 3. 2′, 1″.

840. Per lo che se l' apice massimo delle date frazioni sessagesime non sarà tale, che si possa dividere per 3, onde averne l'apice della radice, in tal caso fatta la riduzione all' ultima spezie, bisognerà di nuovo moltiplicare per 60 una, o due volte secondo il bisogno, il ritrovato numero, finchè l'apice massimo diventi tale che si possa dividere per 3, mentre con questa moltiplicazione per 60 viensi a ridurre la frazione alle spezie inferiori, lo che non muta il valore della frazione, essendo per Esempio un grado lo stesso, che 60′, o pure 3600″ ec.

841. Che se si dovrà levare la radice cuba da un numero composto di diverse spezie, devesi egli ridurre alla minima spezie, poscia dal numero, che n'è provenuto, si levi la radice cuba giusta il num. 825; finalmente la radice trovata si riduca alle spezie superiori giusta il num. 155.

842. Per esaminare l'operazione fatta, e vedere se si è proceduto a dovere nell'estrazione della radice cuba, devesi innalzare al cubo la ritrovata radice, e se ciò, che ne risulta, sarà eguale alla quantità già proposta, sarà segno d'essersi operato a dovere.

ARTICOLO IV.

Modo di estrarre la radice quadrato-quadrata da qualsivoglia quantità.

843. DEf. Estrarre la radice quarta da una proposta quantità non è altro, che ritrovare quel numero, che moltiplicato tre volte in se stesso (pel num. 729.) produce la quantità data.

844. Si osservi, che se con ciascun termine de' numeri naturali si formerà la quarta potestà, si avrà una serie di quadrato-quadrati, nella quale la differenza tra l'uno e l'altro quadrato-quadrato prossimo maggiore, e minore sarà un numero impari; e da queste differenze nasceranno altre differenze, le di cui differenze saranno in proporzione aritmetica; e conseguentemente le differenze delle differenze delle differenze delle differenze, o sia le differenze quarte saranno una quantità costante, che è 24. Ecco l' Esempio.

Radici	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Potestà quarte	1.	16.	81.	256.	625.	1296.	2401.
Differenze prime	15.	65.	175.	369.	671.	1105.	
Differenze seconde	50.	110.	194.	302.	434.		
Differenze terze	60.	84.	108.	132.			
Differenze quarte	24.	24.	24.				

845. Le differenze de' numeri quadrato-quadrati nati da ciascun termine della serie naturale prese nel modo anzidetto, e di cui il primo termine sia l'unità, così 1. 15. 65. 175. 369. 671. 1105. ec. sono la vera sorgente di tutti i numeri quadrato-quadrati, poichè se cominciandosi dall'unità si sommeranno quanti di questi termini si vogliono, la somma sarà sempre un numero quadrato-quadrato: Come sommandosi 1, 15, si ha 16, che è numero quadrato-quadrato; sommandosi 1, 15 65, si ha 81 numero quadrato-quadrato ec.

846. Si osservi, che la differenza fra due quadrato-quadrati prossimi, le di cui radici cioè differiscono di una sola unità, consiste nel quadruplo del cubo della radice minore, più il sestuplo del quadrato di detta radice, più il quadruplo della stessa radice, più una unità. Per lo che se a un dato quadrato-quadrato si aggiungeranno questi elementi si avrà il quadrato-quadrato prossimo maggiore; e così procedendo si potranno costruire le Tavole de' quadrato-quadrati.

847. Teor. Qualunque quadrato-quadrato di radice binomia si compone dai seguenti elementi, cioè dal quadrato-quadrato della prima parte; dal quadruplo del cubo della prima parte nella seconda; dal sestuplo del quadrato della prima parte nel quadrato della seconda; dal quadruplo della prima parte nel cubo della seconda; e finalmente dal quadrato-quadrato della seconda parte.

848. Dim. Pel num. 730. qualunque numero quadrato-quadrato nasce dal moltiplicarsi il cubo nella sua radice: Ma (pel num. 816.) il cubo di radice binomia si compone dai cubi delle parti, dal triplo del quadrato della prima parte moltiplicato nella seconda, e dal triplo del quadrato della seconda parte moltiplicato nella prima; adunque il quadrato-quadrato devesi comporre dai seguenti elementi, cioè dal quadrato-quadrato della prima parte, dal quadruplo del cubo della prima parte moltiplicato nella seconda, dal sestuplo del quadrato della prima parte moltiplicato nel quadrato della seconda, dal quadruplo della prima parte moltiplicato nel cubo della seconda, e dal quadrato-quadrato della seconda parte. Lo che si doveva dimostrare.

849. Corol. 1. Siccome per innalzare al quadrato-quadrato una quantità binomia, per Esempio $2+3$ devonsi moltiplicare gli elementi del suo cubo, che al num. 820 abbiamo veduto essere $8 : 12 :: 12 : 18$, $12 : 18 :: 18 : 27$ prima per 2, onde si ha $16 : 24 :: 24 : 36$, $24 : 36 :: 36 : 54$ in ragione di $2 : 3$; indi per 3, con che si ha $24 : 36 :: 36 : 54$, $36 : 54 :: 54 : 81$ in ragione pure di $2 : 3$, però sarà $16 : 24 : 36 : 54 : 81$, cioè il quadrato-quadrato della prima parte, il cubo della prima parte moltiplicato nella seconda, il quadrato della prima parte moltiplicato nel quadrato della seconda, il cubo della seconda parte moltiplicato nella prima, e finalmente il cubo della seconda parte staranno fra loro nella stessa ragione di $2 : 3$.

850. Corol. 2. Per lo che fra due quadrato-quadrati cadono tre medii proporzionali; e siccome dal moltiplicarsi insieme il primo, e il terzo di questi tre medii proporzionali, o pure dal moltiplicarsi in se stesso il secondo, ne risulta un numero quadrato-quadrato; e di cinque quantità geometricamente proporzionali il prodotto delle estreme è uguale al quadrato di quella di mezzo, o pure al prodotto dell' altre due esistenti al di quà, e al di là della media, però il prodotto di due quadrato-quadrati sarà un numero quadrato quadrato, la di cui radice sarà il prodotto delle radici dei proposti quadrato-quadrati.

851. Corol 3. Quindi quando il prodotto di due date quantità è un quadrato-quadrato, se una di tali quantità è un quadrato-quadrato, lo sarà ancora l' altra, ma se una non lo è, non lo sarà nemmeno l'altra. Se poi il prodotto di due quantità non è un quadrato-quadrato, ed una di tali quantità sia quadrato-quadrato, l' altra non lo sarà.

852. Corol. 4 Qualora un quadrato-quadrato si potrà dividere esattamente per un numero quadrato-quadrato, il quoziente sarà un quadrato-quadrato, la di cui radice sarà ciò, che nasce dal dividersi la radice del dividendo per la radice del divisore.

Corol.

853. Corol. 5. Quindi se una radice non misura un'altra radice, neppure il di lei quadrato-quadrato misurerà il quadrato-quadrato dell'altra radice.

854. Prob. 1. Si debba levare la radice quadrato-quadrata da una proposta quantità.

855. Risol. Si divida in membri la data quantità con separare ogni quattro figure mediante una virgola, incominciando a destra, e quanti saranno i membri di tale quantità, altrettante saranno le figure della cercata radice. Fatto ciò si trovi (mediante la Tavola delle potestà posta al num. 1000.) la radice quadrato-quadrata del primo membro a sinistra, che può essere di quattro, di tre, di due, e anche di una sola figura, qualora sia quadrato-quadrato perfetto; che se non lo è, si prenda la radice del quadrato-quadrato prossimo minore, quale radice si scriva a parte, poichè essa sarà la prima figura della radice cercata. Dopo ciò si levi da questo primo membro il quadrato-quadrato di tale prima figura radicale, e sotto si noti il residuo, scrivendoci appresso il secondo membro. Questo aggregato diminuito dell'ultima figura a destra si divida per la somma delle seguenti parti, cioè del quadruplo del cubo della ritrovata radice, del sestuplo del quadrato di detta radice, e finalmente del quadruplo della stessa radice: Codeste parti poi si devono sommare insieme a tenore di quello si è detto al num. 825. Il quoziente frattanto, che da questa divisione risulterà, darà la seconda figura radicale cercata. Devesi ora ritrovare il numero da sottrarsi dal suddetto membro totale, quale ritroverassi con sommare (nel modo detto al num. 825) il quadruplo del cubo della prima figura radicale trovata moltiplicato nella seconda figura radicale avutasi mediante la divisione, col sestuplo del quadrato della prima figura radicale moltiplicato nel quadrato della seconda, col quadruplo del cubo della seconda figura radicale moltiplicato nella prima più il quadrato-quadrato della seconda figura radicale, e tale somma sarà il cercato numero da sottrarsi. Susseguentemente si regoli l'operazione egualmente per ritrovare gli altri divisori, e i numeri da sottrarsi.

856. La Dim. è analoga alle dimostrazioni date ai num. 787., e 826., e però da esse puossi facilmente ricavare.

857. Prob. 2. Debbasi estrarre la radice quadrato-quadrata dalla quantità 3111696.

858. Risol. Si divida primieramente in membri la data quantità, onde il primo membro a sinistra sarà 311, da cui, perchè non è quadrato-quadrato perfetto, si levi la radice del quadrato-quadrato prossimo minore, quale radice trovasi essere 4, il di cui quadrato-quadrato 256 si sottri da 311, e al residuo 55 si scriva appresso il seguente membro 1696, e questo aggregato 551696 diminuito dell' ultima figura a destra, onde sia 55169, si divida per la somma dei seguenti elementi, cioè del quadruplo del cubo della ritrovata figura radicale 4, del sestuplo del quadrato della stessa figura, e del quadruplo della medesima figura, e perchè, fatta la divisione, si ha di quoziente 2, sarà il 2 la seguente figura radicale. Ora devesi trovare il numero da sottrarsi da 551696. per avere il quale devonsi sommare insieme i seguenti elementi, cioè il quadruplo del cubo della prima ritrovata figura radicale 4 moltiplicato nella seconda 2, il sestuplo del quadrato della prima figura radicale 4 moltiplicato nel quadrato della seconda 2, il quadruplo del cubo della seconda figura radicale moltiplicato nella prima, e il quadrato-quadrato della seconda figura radicale 2. Tale somma pertanto trovasi essere 551696, che sottratta dall'aggregato 551696, perchè nulla avanza, però il

proposto numero 3111696 è un quadrato-quadrato perfetto, la di cui radice è 42. Ecco il Calcolo.

Numero proposto	3 1 1,1 6 9 6		
Quadrato-quadrato prossimo minore	2 5 6		
Residuo più il secondo membro	5 5 1 6 9 6		Radice 42
Prodotto da sottrarsi	5 5 1 6 9 6		
Residuo	0 0 0 0 0 0		

Quadruplo del cubo della prima figura radicale 4 - - - - - -	2 5 6
Sestuplo del quadrato della stessa figura	9 6
Quadruplo della stessa figura	1 6
Divisore	2 6 5 7 6

Quadruplo del cubo della prima figura radicale moltiplicato nella seconda	5 1 2
Sestuplo del quad. della prima figura radicale moltiplicato nel quad. della seconda	3 8 4
Quadruplo del cubo della seconda figura radicale moltiplicato nella prima	1 2 8
Quadrato-quadrato della seconda figura radicale	1 6
Prodotto da sottrarsi	5 5 1 6 9 6

859. Qualora la proposta quantità non sarà un quadrato-quadrato perfetto, così che nell'ultima sottrazione avanzi qualche residuo, non si potrà avere la sua radice quarta, che per approssimazione, coll' aggiungere al detto residuo alcuni quaternarj di zeri, quanti si vorrà, seguitando ad operare giusta il num. 854, e trascurando poscia l'ultimo residuo. Nella trovata radice poi devonsi separare con un punto tante figure a destra quanti furono i quaternarj di zeri aggiunti. Lo che deve servire di regola nell'estrarre la radice quarta dalle frazioni decimali, mentre nella radice trovata devonsi separare a destra tante figure con un punto, quante ne indica la quarta parte delle figure separate col punto nella proposta frazione decimale: Che se il numero di queste figure non sarà tale, che si possa dividere per 4, in tale caso si aggiungano alla frazione decimale tanti zeri, quanti sono necessarj, perchè ne risulti un numero di figure divisibile per 4.

860. Dalle frazioni sessagesime si leverà la radice quadrato-quadrata collo stesso metodo del num. 854, se non che devonsi prima ridurre all'ultima spezie, e alla ritrovata radice devesi dare per apice la quarta parte dell'apice massimo della frazione data; che se quest'apice non sarà divisibile per 4, si moltiplichi tante volte per 60 la frazione data, quante è necessario, acciò risulti un'apice divisibile per 4.

861. Quanto ai rotti si avrà la loro radice quadrato-quadrata con levare tale radice dal numeratore, e dal denominatore per averne un nuovo rotto, che sarà la radice cercata.

862.

862. Che se il proposto rotto non fosse rotto quadrato-quadrato, devesi egli primieramente ridurre a frazione decimale (giusta il num. 329.), e poscia operare a tenore del num. 858

863. Dovendosi levare la radice quadrato-quadrata da un intero, e rotto, devesi prima ridurre tutto a rotto, e poscia operare giusta il num. 860.

864. Quando il numero, da cui devesi levare la radice quadrato-quadrata, avrà annesse parti minime, dovrassi egli prima ridurre alla minima spezie, e poi estrarci la radice quarta.

865. Avvertasi che quì pure hanno luogo le cose dette ai numeri 827, 828, 829, 842.

ARTICOLO V.

Modo di estrarre da qualunque quantità le radici delle seguenti potestà superiori.

866. Relativamente a queste potestà hanno luogo proporzionalmente le cose dette ai numeri 844, 845, 846, come succintamente dirò in appresso.

867. Se con ciascun termine de' numeri naturali si formerà la quintà potestà, si avrà una serie di quadrato-cubi, tra quali se si prenderanno le differenze, e le differenze delle differenze, e così susseguentemente, si avranno cinque ordini di differenze, delle quali le quarte saranno in proporzione Aritmetica, e le quinte saranno costanti, ognuna cioè eguale a 120. La differenza poi tra due prossimi quadrato-cubi, le di cui radici cioè differiscono di una unità, consiste nel quintuplo del quadrato-quadrato della radice minore più il decuplo del suo cubo più il decuplo del suo quadrato, più il quintuplo della stessa radice, più una unità. Ecco l'Esempio.

Radici	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Potestà quinte	1	32	243	1024	3125	7776	16807
Differenze prime	31	211	781	2101	4651	9031	
Differenze seconde	180	570	1320	2550	4380		
Differenze terze	390	750	1230	1830			
Differenze quarte	360	480	600				
Differenze quinte	120	120					

868. Che se con ciascun termine della serie de' numeri naturali si formerà la sesta potestà, si avrà una serie di cubo-cubi, tra quali se si prenderanno le differenze, e le differenze delle differenze, e così susseguentemente, si avranno sei ordini di differenze, delle quali le quinte saranno in proporzione Aritmetica, e le seste saranno costanti, ognuna cioè eguale a 720. La differenza poi tra due prossimi cubo-cubi, le di cui radici cioè differiscono di una unità consiste nel sestuplo del quadrato-cubo della radice minore più il quindecuplo del quadrato-quadrato della stessa radice più il ventuplo del cubo della medesima radice più il quindecuplo del quadrato della stessa radice più il sestuplo di tale radice più una unità. Ecco l'Esempio

Ra-

Radici	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7
Potestà feste	1.	64	729	4096	15625	46656	117649
Differenze prime	63	665	3367	11529	31031	70993	
Differenze feconde	602	2702	8162	19502	39962		
Differenze terze	2100	5460	11340	20460			
Differenze quarte	3360	5880	9120				
Differenze quinte	2520	3240					
Differenze fefte	720						

869. Generalmente fe con ciafcun termine de' numeri naturali fi formerà qual più piaccia poteftà, fi avrà una ferie di tali poteftà, che fe fra i termini di quefta ferie fi prenderanno le differenze, e le differenze fra le differenze, e così fucceffivamente, tra la ferie de' numeri naturali, e tra la ferie delle poteftà prefe caderanno tanti ordini di differenze, quanti ne efprime l' efponente della poteftà, a cui fono ftati innalzati i termini della ferie naturale. L'ultima ferie farà di termini coftanti, o fia di un termine coftante, il quale viene determinato dal prodotto di tanti termini della ferie naturale principianti dall' unità, quanti ne efprime l' efponente della poteftà; come rifpetto alla poteftà quinta il termine coftante farà $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$; così rifpetto alla poteftà ottava il termine coftante farà $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40320$. La penultima ferie poi, o fia il penultimo ordine delle differenze cofterà fempre di termini in proporzione aritmetica.

870. Teor. 1. Qualunque quadrato-cubo di radice binomia fi compone dai feguenti elementi, cioè dalla poteftà quinta della prima parte della radice, dal quintuplo del quadrato-quadrato della prima parte moltiplicato nella feconda, dal decuplo del cubo della prima parte moltiplicato nel quadrato della feconda, dal decuplo del quadrato della prima parte moltiplicato nel cubo della feconda, dal quintuplo della prima parte moltiplicato nel quadrato-quadrato della feconda, e finalmente dalla poteftà quinta della feconda parte della radice.

871. Teor. 2. Qualunque cubo-cubo di radice binomia fi compone dai feguenti elementi, cioè dalla poteftà fefta della prima parte della radice, dal feftuplo del quadrato-cubo della prima parte moltiplicato nella feconda, dal quindecuplo del quadrato-quadrato della prima parte moltiplicato nel quadrato della feconda, dal ventuplo del cubo della prima parte moltiplicato nel cubo della feconda, dal quindecuplo del quadrato della prima parte moltiplicato nel quadrato-quadrato della feconda, dal feftuplo della prima moltiplicato nel quadrato-cubo della feconda, e finalmente dal cubo-cubo della feconda parte della radice.

872. Teor. 3. Qualunque quadrato-quadrato-cubo di radice binomia fi compone dai feguenti elementi, cioè dal quadrato-quadrato-cubo della prima parte della radice, dal fettuplo del cubo-cubo della prima parte moltiplicato nella feconda, dal ventunuplo del quadrato-cubo della prima parte moltiplicato nel quadrato della feconda, dal trentacinquplo del quadrato-quadrato della prima parte moltiplicato nel cubo della feconda, dal trentacinquplo del cubo della prima parte moltiplicato nel quadrato-quadrato della feconda, dal ventunuplo del quadrato della prima parte moltiplicato nel quadrato-cubo della feconda, dal fettuplo della prima parte moltiplicato nel cubo-cubo della feconda, e finalmente dal quadrato-quadrato-cubo della feconda parte della radice

873. Le Dim. di quefti Teoremi rendonfi manifefte dall' offervare che qualunque

que potestà risulta dal moltiplicare la radice negli elementi della potestà prossima minore.

874. Si vede pertanto chiaramente come procedono le potestà, e come di ciascuna si abbiano gli elementi, i quali servono all'estrazione delle loro radici.

875. Costa pure dalle cose dette di sopra, che nell' estrazione di qualunque radice da un dato numero, quale devesi prima dividere in membri, ognuno de' quali comprenda tante figure, quante ne vengono indicate dal grado della potestà, di cui si vuole la radice, dopo avere levata tale radice dal primo membro a sinistra, supposto che sia potestà perfetta, e se non lo è, dalla potestà prossima minore, non altro più rimane a fare, che ritrovare i divisori de' nuovi membri totali, e i numeri, che da tali membri devonsi sottrarre. Quanto a ciascun divisore, egli si ha con sommare insieme tutti gli elementi di tale potestà della prima parte della radice, intendendosi esclusa la potestà dello stesso grado. Per quello poi, che risguarda il numero da sottrarsi, egli si ha col sommarli insieme (nel modo detto tanto rispetto ai divisori, come rispetto ai prodotti da sottrarsi) tutti gli elementi, a riserva del primo, che alla formazione di tale potestà richiedonsi; e questi elementi hansi a formare dalle figure radicali da prima trovate, considerate come una parte sola nella recentemente trovata figura radicale mediante la divisione.

876. Due cose si osservino per se stesse evidenti; la prima, che se quantità eguali si innalzeranno a potestà dello stesso grado, le risultanti potestà saranno eguali. Così pure se da quantità eguali si leverà la stessa radice, queste radici saranno eguali. La seconda, che dai numeri primi non si può levare alcuna radice, perchè essi non risultano da alcun numero moltiplicato in se stesso; poichè non sono (pel num. 29.), che dalla sola unità misurabili.

877. Prima di por fine alla presente dottrina dell' estrazione delle radici parmi opportuno il dimostrare il seguente Teorema.

878. Teor. 4. La radice di un numero, che non è potestà perfetta, non si può esprimere nè con numeri interi, nè con numeri rotti.

879. Dim. della prima parte. Se la detta radice si potesse esprimere con un numero intero, dalla replicata moltiplicazione di tale numero in se stesso risulterebbe (pel num. 723) quella quantità, da cui levare si deve tale radice: Ma (per Ipotesi) il proposto numero non è potestà perfetta, dunque non risulta da un numero intero moltiplicato in se stesso, e però con numeri interi non si può esprimere la sua radice.

Dim. della seconda parte. Per quante volte si moltiplichi in se stessa una frazione ne risulta sempre una frazione, avvegnachè si moltiplichi in se stessa una frazione con moltiplicarsi in se stessi il numeratore, e il denominatore: Ma così è, che per Ipotesi il numero dato è un numero intero, dunque la sua radice non può essere una frazione. Lo che si doveva dimostrare.

ARTICOLO VI.

Del Calcolo delle Potestà per mezzo de' loro esponenti.

880. Già abbiamo detto di sopra al num. 733 che cosa siano gli esponenti delle potestà, cioè che sono quei numeri, che esprimono il grado di ciascuna potestà; onde l'esponente del quadrato, o seconda potestà è 2; l'esponente del cubo, o terza potestà è 3; l'esponente del quadrato-quadrato, o quarta potestà è 4 ec., e questi esponenti si scrivono a destra della radice un poco più alto.

Così

Così 3^2 esprimerà il quadrato di 3; 3^3 vuol dire il cubo di 3; 3^4 significa il quadrato-quadrato di 3 ec.

881. Teor. 1. Se si moltiplicheranno insieme due potestà della stessa radice, il prodotto sarà una potestà, che avrà per esponente la somma degli esponenti delle due potestà insieme moltiplicate: Come moltiplicandosi 3^2 per 3^5, il prodotto sarà $3^{2+5} = 3^7$.

882. Dim. Poichè le due date potestà da moltiplicarsi sono della stessa radice il moltiplicarsi la prima potestà nella seconda non è altro, che moltiplicare la prima di queste potestà tante volte per la sua radice, quante volte lo indica il grado, o sia l'esponente della seconda potestà: Ma (pel num. 734.) l'uffizio dell' esponente è d'indicare quante volte la radice è stata moltiplicata in se stessa; dunque perchè oltre il numero delle volte, che tale radice è stata moltiplicata in se stessa per rapporto alla prima potestà, ella è stata di nuovo mediante la moltiplicazione di una potestà nell' altra moltiplicata tante volte in se stessa, quante esprime l'esponente della seconda potestà; e però in questo prodotto la radice sarà moltiplicata tante volte in se stessa, quante lo indica la somma dei due esponenti, conseguentemente tale prodotto sarà una potesta, che avrà per esponente la somma degli esponenti delle due potestà insieme moltiplicate. Lo che si doveva dimostrare.

883. Corol. Quindi dovendosi dividere una potestà per un'altra, il quoziente sarà una potestà, che avrà per esponente la differenza degli esponenti delle due proposte potestà.

884. Teor. 2. Dovendosi innalzare una potestà data ad un'altra di un dato esponente, l'esponente della nuova potestà sarà il prodotto dell'esponente proposto nell'esponente della potestà data: Come volendosi elevare 3^2 alla sesta potestà si farà $3^{2\times6} = 3^{12}$.

885. Dim. Per avere l'esponente della potestà cercata di una data radice si deve prendere tante volte l'esponente della stessa radice, quante unità contiene l'esponente della potestà cercata; o sia si deve moltiplicare l'esponente della radice nell'esponente della cercata potestà; ma così è, che quando si vuole innalzare una potestà data ad un'altra, la potestà data fa le veci di radice; dunque per avere l'esponente della nuova potestà si deve moltiplicare l'esponente della potestà data nell'esponente della potestà cercata. Lo che si doveva dimostrare.

886. Corol. 1. S'intende pertanto, come una stessa potestà ottenga diversa denominazione, secondo che si riferisce a diverse quantità: Così 2^4 si dice potestà quarta rispettivamente al 2; e potestà seconda rispettivamente al 2^2.

887. Corol. 2. Qualora poi da una qualunque potestà si voglia estrarre una cercata radice, l'esponente di tale radice sarà il quoziente, che nasce dal dividersi l'esponente della potestà data per l'esponente della radice cercata: Così da 2^{15} volendosi levare la radice cuba, o sia terza, tale radice sarà $2^{\frac{15}{3}} = 2^5$. Così volendosi la radice seconda di 5, o sia di 5^1, ella sarà $5^{\frac{1}{2}}$: Mentre qualunque quantità, qualora non abbia alcun' esponente, intendesi sempre che abbia per esponente l'unità, poichè, come abbiamo detto al num 734., qualunque quantità chiamasi potestà prima.

AR-

ARTICOLO VII.

Delle quantità radicali, e loro origine.

888. DEf. Quella quantità chiamasi propriamente radicale, o irrazionale, o incommensurabile, o sorda, o ineffabile, la quale da niuna quantità nè intera, nè fratta può essere esattamente misurata.

889. Corol. 1. Non si può adunque definire quante volte nelle quantità irrazionali si contenga l'unità, o una qualunque sua parte; e però tali quantità non si possono con numeri esprimere, quindi è, che si chiamano quantità ineffabili.

890. Corol. 2. Poichè in niun modo esprimere si possono con numeri le quantità irrazionali, se due, o più quantità irrazionali si sommeranno insieme, tale somma sarà inesprimibile, e però ella sarà una quantità irrazionale: E per la stessa ragione se ad una quantità irrazionale si aggiungerà una quantità razionale, tale aggregato sarà irrazionale.

891. Le quantità irrazionali nascono dal non potersi levare una proposta radice da un dato numero, che non è corrispondente potestà perfetta, la di cui radice per ciò (pel num. 877.) non si può con numeri esprimere: E però le quantità irrazionali, o sia radicali non sono altro, che il lato, o radice di un numero, che non è potestà perfetta.

892. Le quantità radicali s' indicano mediante questo segno $\surd$, che chiamasi vincolo radicale. Questo vincolo radicale $\surd$ si determina a significare qual radice più si vuole collo scriverci sopra l'esponente di quella potestà, a cui si riferisce la radice cercata: Così $\sqrt[2]{}$, o semplicemente $\surd$ indica la radice quadrata: Così $\sqrt[3]{}$ significa la radice cuba: $\sqrt[4]{}$ esprime la radice quadrato-quadrata ec.: E però per indicare la radice quadrata di 18 si scrive $\sqrt[2]{18}$, e comunemente $\sqrt{18}$, perchè quando trattasi della radice quadrata non vi si pone l'esponente: Per esprimere la radice cuba di 9 si fa $\sqrt[3]{9}$. ec.

893. Qualora si voglia indicare la radice di una quantità risultante da più parti insieme unite per mezzo de' segni $+$, o $-$, in tal caso dopo averci prefisso il vincolo, bisogna tirare una linea sopra il complesso di quelle parti, di cui si vuole indicare la radice: Per Esempio essendo dato $24 + 16 + 31$, e volendosi la radice cuba solamente di $24 + 16$, si scriverà $\sqrt[3]{24 + 16 + 31}$; o pure devesi chiudere fra due parentesi quella quantità, di cui vuolsi esprimere la radice, così $\sqrt[3]{}(24 + 16) + 31$.

894. Dappoichè per avere la radice di una proposta potestà basta (pel num. 887.) dare per esponente a tale potestà, o quantità il quoziente, che nasce dal dividersi l'esponente di detta quantità per l'esponente della radice cercata, però viensi in tal modo a togliere l'uso del vincolo radicale: Onde in vece di scrivere $\surd 5$, si esprimerà tale quantità radicale a foggia di potestà in questo modo $5^{\frac{1}{2}}$, o sia

 giu-

giusta il num. 54. così $5^{1:2}$. Istessamente in vece di $\sqrt[3]{7^2}$ si farà $7^{\frac{2}{3}}$, o $7^{2:3}$ ec.

Se da una quantità radicale si vorrà estrarre un' altra cercata radice, vi si prefiggerà un nuovo corrispondente vincolo, come volendosi la radice cuba di $\sqrt{7}$ si farà $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$.

ARTICOLO VIII.

Delle quantità incommensurabili fra loro.

895. DEf. 1. Quelle quantità diconsi incommensurabili fra loro, delle quali non avvi alcuna misura comune, come $\sqrt{17}$, e 8.

896. Corol. 1. Generalmente adunque, essendo date due quantità ineguali, se col levarsi continuamente la minore dalla maggiore con alterna sottrazione mai si potrà giungere ad un termine, in cui la minore delle quantità date, o una sua parte qualunque misuri la maggiore, tali quantità saranno fra loro incommensurabili.

897. Corol. 2. Poichè (pel num. 754.) la ragione duplicata della ragione di numero a numero deve avere esponenti quadrati; la triplicata esponenti cubi ec., se si darà una ragione duplicata, il di cui esponente non sia numero quadrato; o una ragione triplicata, il di cui esponente non sia numero cubo ec., la ragione di quelle quantità, delle quali la detta ragione è duplicata, triplicata ec., non sarà ragione di numero a numero: Così perchè la ragione di $3 : 4$, che è duplicata della ragione di $3 : \sqrt{12}$ non ha esponente quadrato, però la ragione di $3 : \sqrt{12}$ non è ragione di numero a numero.

898. Corol. 3. Le radici quadrate pertanto di due quantità, le quali non stiano fra loro come un numero quadrato a un numero quadrato, sono in se stesse incommensurabili; come pure lo sono le radici cube di due quantità, che non stanno fra loro come un numero cubo a un numero cubo.

899. Def. 2. Se i quadrati di due quantità incommensurabili saranno tali, che ricevano una comune misura, tali quantità si dicono incommensurabili in se stesse, ma commensurabili in potenza: Come 3, $\sqrt{5}$ sono incommensurabili in se stesse, ma commensurabili in potenza, poichè i loro quadrati 9, 5 sono commensurabili.

900. Def. 3. Se due date quantità saranno tali, che non solo siano tra loro incommensurabili, ma lo siano pure i loro quadrati, tali quantità saranno incommensurabili tanto in se stesse, come in potenza: Come 11, $\sqrt{\sqrt{15}}$.

901. Prob. 1. Ad una proposta quantità se ne debba ritrovare un'altra incommensurabile in se stessa, ma commensurabile in potenza.

902. Risol. La quantità data sia per Esempio 30. Si prendano due numeri, come 10, 6, i quali non abbiano fra loro ragione di numero quadrato a numero quadrato, poscia (pel num. 743.) si trovi la quantità $\sqrt{540}$, al di cui quadrato 540 stia il quadrato 900 della quantità 30, come $10 : 6$. Dico che la quantità $\sqrt{540}$ è alla data quantità 30 incommensurabile in se stessa, ma commensurabile in potenza.

903.

903. Dim. della prima parte. Poichè il quadrato di 30 sta al quadrato di $\sqrt{540}$, come 10 : 6 e tra 10, e 6 non v'è ragione di numero quadrato a numero quadrato, tale ragione neppure si troverà tra il quadrato di 30, e il quadrato di $\sqrt{540}$, conseguentemente (pel num. 898.) queste due quantità 30, $\sqrt{540}$ sono incommensurabili in se stesse. Lo che si doveva dimostrare.

904. Dim. della seconda parte. I quadrati di 30, $\sqrt{540}$ stanno fra loro (per costruzione), come 10 : 6; ma 10, e 6 sono quantità fra loro commensurabili, dunque lo sono pure i quadrati di 30, $\sqrt{540}$. E però le quantità 30, $\sqrt{540}$ sono incommensurabili in se stesse, ma commensurabili in potenza. Lo che si doveva dimostrare.

905. Prob. 2. Ad una data quantità se ne debba ritrovare un'altra incommensurabile tanto in se stessa come in potenza.

906. Risol. La quantità data sia 30. Si prendano due quantità, come 10, 6, le quali non abbiano fra loro ragione di numero quadrato a numero quadrato; poscia (pel num. 743.) si trovi la quantità $\sqrt{540}$, al di cui quadrato 540 stia il quadrato 900 della quantità 30, come 10 : 6. Fatto questo tra 30, e $\sqrt{540}$ si trovi un medio proporzionale, che sarà la radice quadrata del prodotto di 30 in $\sqrt{540}$, cioè $\sqrt{30 \times \sqrt{540}}$. Ora dico, che queste due quantità 30, e $\sqrt{30 \times \sqrt{540}}$ sono incommensurabili tanto in se stesse, come in potenza.

907. Dim. Il quadrato di 30 sta al quadrato di $\sqrt{30 \times \sqrt{540}}$ come 30×30 a $30 \times \sqrt{540}$, cioè (dividendo per 30 l'uno, e l'altro termine della seconda ragione) come 30 a $\sqrt{540}$: Ma 30, e $\sqrt{540}$ (pel num. 902.) sono incommensurabili in se stesse; dunque le due quantità 30, $\sqrt{30 \times \sqrt{540}}$ sono incommensurabili non solo in se stesse, ma anche in potenza. Lo che si doveva dimostrare.

908. Poichè quantità razionali sono quelle, che ricevono qualche misura, e però esprimibili sono con numeri, quindi siccome il moltiplicarsi in se stessa una quantità non è altro, che una replicata addizione della stessa quantità (pel num. 106.), se la quantità, che in se stessa si moltiplica sarà razionale, lo sarà pure il suo quadrato (pel num. 187.); e però tutte quelle quantità, che sono commensurabili in se stesse, lo sono anche in potenza.

909. Laddove, poichè (pel num. 891.) le radici de' numeri, che non sono potestà perfette, sono quantità irrazionali, non tutte quelle quantità, che sono commensurabili in potenza, sono pure commensurabili in se stesse.

910. Corol. Siccome adunque dal moltiplicarsi in se stessa una quantità razionale risulta sempre una potestà razionale, se il quadrato, il cubo ec. di una quantità sarà irrazionale, lo sarà ancora la quantità stessa.

911. Teor. 1. Il prodotto di due quantità una razionale, e l'altra irrazionale, è irrazionale.

912. Dim. Pel. num. 104. Il moltiplicarsi una quantità irrazionale per una razionale non è altro, che prendersi tante volte la quantità irrazionale quante sono le unità nella quantità razionale: Ma (pel num. 890.) per quante volte si prenda una quantità irrazionale, la somma è sempre una quantità irrazionale; se adunque una quantità razionale si moltiplicherà con una irrazionale, il prodotto sarà irrazionale.

913. Corol. Poichè (pel num. 492.) il quadrato della quantità, che è media proporzionale fra due quantità, è eguale al loro prodotto, se delle dette quantità una sarà razionale, e l'altra irrazionale, tale quadrato sarà irrazionale, e lo sarà pure (pel num. 910.) la sua radice; e però il medio proporzionale tra una quantità razionale, e una irrazionale, sarà irrazionale.

914. Teor. 2. Se di tre date quantità, come 3, 6, $\sqrt{8}$ la prima sarà commensurabile colla seconda, ma la terza sia alla stessa seconda incommensurabile, o in se stessa, o in potenza, saranno parimente incommensurabili la prima, e la terza; cioè 3, e $\sqrt{8}$.

915. Dim. Se la terza fosse commensurabile alla prima, poichè (per Ipotesi) la prima è commensurabile alla seconda, sarebbe pure (pel. num. 187.) la terza commensurabile alla seconda: Ma (per Ipotesi) la terza non è commensurabile alla seconda, dunque la prima, e la terza sono incommensurabili. Lo che si doveva dimostrare.

916. Corol. 1. Quindi se saranno due quantità commensurabili, ed una terza quantità sia ad una di loro incommensurabile, lo sarà anche all'altra.

917. Corol. 2. Che se a due quantità incommensurabili saranno rispettivamente commensurabili due altre quantità, queste altre due saranno incommensurabili fra loro: Come 9, $\sqrt{15}$, e 3, $\sqrt{5}$.

918. Def. 5. L'aggregato mediante il segno + di due quantità, delle quali una sia razionale, e l'altra irrazionale, come $2 + \sqrt{7}$, o tutte due irrazionali, come $\sqrt{3} + \sqrt{5}$, chiamasi binomio. Questi binomii poi (giusta il num. 890) sono irrazionali. Da questi binomii nascono due quantità irrazionali; cioè quella, che è media proporzionale fra le due parti del binomio (pel num. 913.), e quella, che nasce dalla loro somma (pel num. 890.)

919. Def. 6. Qualora da una quantità razionale debbasi sottrarre una radicale, o da una radicale una razionale, o da una radicale un'altra radicale, non potendosi fare tale sottrazione, che mediante il segno —, a motivo dell'inesprimibilità dell'irrazionale, come $26 - \sqrt{19}$; o pure $\sqrt{30} - 5$; ovvero $\sqrt{12} - \sqrt{7}$, tali quantità chiamansi residui, e da Euclide diconsi Apotome, avvegnachè quantunque in apparenza sembrino binomii, in realtà però non lo sono: E tali residui sono irrazionali.

ARTICOLO IX.

Modo di ridurre le quantità radicali allo stesso esponente.

920. PRob. 1. Debbansi ridurre allo stesso esponente due quantità radicali, come $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$.

921. Risol. Ciascuna quantità esistente sotto al vincolo si innalzi alla potestà indicata dall'esponente dell'altro vincolo, indi al vincolo di ciascuna di queste potestà si dia per esponente il prodotto degli esponenti affissi a ciascun vincolo, e si avrà $\sqrt[2\times3]{3^3} = \sqrt[6]{27}$, $\sqrt[2\times3]{2^2} = \sqrt[6]{4}$.

922. Dim. Pel num. 894. egli è $\sqrt{3} = 3^{1:2}$, e $\sqrt[3]{2} = 2^{1:3}$: Ma (pel num. 255.) questi esponenti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ridotti allo stesso denominatore sono $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$ Dunque con

ri-

ridurfi le due date quantità radicali allo ftefso efponente fi avrà $3^{3:6}$, $2^{2:6}$, o fia $\sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$, $\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}$; e però fi riducono allo ftefso efponente due quantità radicali con inalzare ciafcuna quantità ec. Lo che fi doveva dimoftrare

923. Se le date quantità radicali faranno più di due, fi riducano le prime due; poi quefte due colla terza; indi quefte tre ridotte colla quarta ec., come fi è detto al num. 257 doverfi fare per ridurre più frazioni allo ftefso denominatore.

924. Qualora tanto l'efponente della nuova poteftà, come l'efponente radicale fi potranno ridurre a minimi termini (giufta il num. 228.), ciò fi faccia, mentre non altera il valore della quantità radicale, come è evidente: Laonde la quantità $\sqrt[6]{3^3}$ trovata al num. 922 è $= \sqrt[2]{3}$.

925. Prob. 2. Date due quantità radicali di diverfo efponente debbafi conofcere quale di loro fia la maggiore.

926. Rifol. Si riducano i due dati radicali allo ftefso efponente (pel num. 921.), lo che fatto quello farà maggiore, fotto al cui vincolo troverafsi maggior quantità. Del che la dimoftrazione è chiara.

ARTICOLO X.

Modo di ridurre le quantità radicali alla più femplice efpreffione.

927. DEf. 1. Ridurre una quantità radicale alla più femplice efpreffione non è altro, che levare in parte da tale quantità la radice indicata dal fuo efponente.

928. Prob. debbafi ridurre alla più femplice efpreffione una data quantità radicale per efempio $\sqrt[3]{54}$.

929. Rifol. Si divida la quantità efiftente fotto al vincolo per una potenza del medefimo grado indicato dall'efponente del vincolo radicale, e il quoziente fi fcriva fotto al vincolo, prefiggendo intanto al vincolo la radice di tale poteftà: Come nell'addotto Efempio $\sqrt[3]{54}$, fi divida il 54 per 27, che è una potenza del terzo grado indicato dall'efponente 3 del vincolo, ed il quoziente 2 fi fcriva fotto al vincolo, prefiggendoci pofcia la radice terza di 27, che è 3; onde fi avrà $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54}$, avvegnachè fia $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \times 2}$.

930. Dim. Da quanto or ora fi è detto hafsi $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \times 3^3} =$ (pel num. 894.) $2^{1:3} \times 3^{3:3}$: Ma $3^{3:3} = \sqrt[3]{3^3} = 3$; dunque $2^{1:3} \times 3 = 3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54}$.

931. Corol. Quefta operazione adunque ha luogo folamente quando la quantità efiftente fotto al vincolo fia divifibile per una potenza, il di cui efponente fia eguale all'efponente del vincolo radicale.

932. Molte volte accade di non poterfi, conofcere fubito quali fiano que' moltiplicatori, da quali è nata la propofta quantità radicale, nel qual cafo bifogna ritrovare (pel num. 191.) tutti i divifori di tale quantità, offervando fe fra quefti divifori ve ne fia alcuno, che fia appunto una poteftà di tale efponente, quale è l'efponente prefifso al vincolo; che fe vi farà, fi potrà con effa fare la

la riduzione (giusta il num. 929); che se non vi sarà, sarà impossibile tale riduzione. Debbasi per Esempio ridurre alla più semplice espressione il radicale $\sqrt[5]{416}$. Si risolva la quantità esistente sotto al vincolo ne' suoi divisori, tra quali trovandosi il 32, che è la quinta potestà di 2, però con questo 32 divisa la quantità 416 si ha di quoziente 13, che devesi scrivere sotto al vincolo, indi prefiggervi la radice quinta di 32, cioè 2, con che si ha $\sqrt[5]{416} = 2\sqrt[5]{13}$.

933. Quando vi siano più divisori, che siano potestà denominate dall'esponente del vincolo, per fare la cercata riduzione dovrassi usare solamente il massimo di tali divisori.

934. Corol. Quindi è chiaro, che se si vorrà ridurre a quantità puramente irrazionale una data quantità parte razionale, e parte irrazionale, come $6\sqrt{3}$, basterà innalzare, la quantità razionale esistente fuori del vincolo alla potestà indicata dall'esponente prefisso al vincolo, indi moltiplicarla nella quantità esistente sotto al vincolo; e però nel proposto caso sarà $6\sqrt{3} = \sqrt{3 \times 36} = \sqrt{108}$.

935. Si osservi, che nel ridurre allo stesso esponente codesti radicali già ridotti alla più semplice espressione, non si mutano le quantità esistenti fuori del vincolo, ma rimangono le stesse: Come dovendosi ridurre (giusta il num. 921.) allo stesso esponente i radicali $3\sqrt[2]{2}$, $4\sqrt[3]{5}$ si farà $3\sqrt[6]{8}$, $4\sqrt[6]{25}$.

936. Def. 2. Le quantità esistenti fuori del vincolo si chiamano coefficienti; e il loro uffizio è indicare quante volte debbasi prendere la quantità radicale. Quindi $3\sqrt{5}$ è lo stesso, che $\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5}$; cioè $3\sqrt{5}$ vuol dire, che la quantità radicale $\sqrt{5}$ si deve prendere tre volte; e perchè (pel num. 106.) la moltiplicazione non è altro, che una replicata addizione, in cui il moltiplicando si prende tante volte, quante unità sono nel moltiplicante, però essendo $3\sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5}$, sarà $3\sqrt{5}$ il prodotto di $\sqrt{5}$ in 3; conseguentemente dovendosi moltiplicare una quantità radicale con una quantità razionale, basterà prefiggere al vincolo tale quantità razionale; lo che vale tanto per le quantità razionali intere, come fratte: Laonde volendosi $\frac{2}{3}$ di $\sqrt{26}$ si farà $\frac{2}{3}\sqrt{26}$, o pure $(2:3)\sqrt{26}$, e in questo modo devesi inchiudere la frazione tra parentesi, perchè non il solo 3, ma tutta la frazione $2:3$ è il coefficiente di $\sqrt{26}$; oppure devesi scrivere così $\overline{2:3}\sqrt{26}$.

937. Def. 3. Le quantità radicali diconsi fra loro comunicanti, o simili, quando ridotte alla più semplice espressione hanno sotto al vincolo la medesima quantità: Come $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$; e la ragione per cui diconsi comunicanti si è, perchè tra loro passa ragione di numero a numero, o sia commensurabile.

938. Teor. Le quantità radicali comunicanti stanno frà loro come fatta la riduzione stanno le quantità prefisse al vincolo, o sia come i loro coefficienti: Come avendosi $\sqrt{12}$, $\sqrt{48}$, che ridotte sono $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$, sarà $\sqrt{12} : \sqrt{48} :: 2 : 4$.

939. Dim. Pel num. 929 si hà $2\sqrt{3} = \sqrt{3 \times 4}$, e $4\sqrt{3} = \sqrt{3 \times 16}$; dunque (pel num. 513.) sarà $\sqrt{12} = \sqrt{3 \times 4} : \sqrt{48} = \sqrt{3 \times 16} :: 4 : 16 :: 2 : 4$

940. Si osservi, che quando più quantità radicali esistenti sotto al vincolo saranno eguali potransi ridurre ad un solo tutti questi radicali, con sommare insieme i loro coefficienti, indi notare sotto al vincolo la comune quantità radicale: Onde avendosi $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ si farà $5\sqrt{3}$; e quello che si è detto della somma si intenda ancora della sottrazione, così che essendo $3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ sarà lo stesso, che $\sqrt{3}$,

men-

mentre sottrandosi 2 da 3 resta 1, e quando il coefficiente è l'unità non si nota, ma vi s' intende.

ARTICOLO XI.

Modo di sommare le quantità radicali.

941. PRoblema Si debbano sommare insieme due, o più quantità radicali.

942. Risol. si riducano i dati radicali all' espressione più semplice (pel num. 929.), lo che fatto si osservi, se tali quantità radicali sono, o non sono comunicanti. Se non sono comunicanti si sommino insieme mediante il segno +: Come dovendosi sommare $\sqrt{18}$ con $\sqrt{48}$, che ridotte alla più semplice espressione sono $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{3}$, la loro somma sarà $3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$, o sia assolutamente $\sqrt{18} + \sqrt{48}$.

943. Che se le date quantità saranno comunicanti, la loro somma si farà con sommare i coefficienti, indi mettere sotto al vincolo la comune quantità radicale, come si è detto al num. 940: E però dovendosi sommare $\sqrt{75}$ con $\sqrt{27}$, che ridotti alla più semplice espressione sono $5\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, si farà $8\sqrt{3}$.

944. La prima parte non ha bisogno di dimostrazione; la seconda è evidente, poichè (pel num. 936.) $5\sqrt{3}$ vuol dire, che il radicale $\sqrt{3}$ si deve prendere cinque volte; e $3\sqrt{3}$ vuol dire, che il radicale $\sqrt{3}$ si deve prendere tre volte; ma cinque volte il $\sqrt{3}$ più tre volte il $\sqrt{3}$ fa otto volte il $\sqrt{3}$, dunque la somma di $5\sqrt{3}$ con $3\sqrt{3}$ fa $8\sqrt{3}$. Lo che si doveva dimostrare.

945. Se le quantità radicali non avranno lo stesso esponente, vi si dovranno ridurre (giusta il num. 921.)

946. Dovendosi sommare una quantità razionale con una radicale, come 7 con $\sqrt{13}$, si farà uso del segno + così $7 + \sqrt{13}$. Che se si dovranno sommare più quantità affette da diversi segni si scrivano una dopo l' altra cogli stessi segni. Così per sommare $\sqrt{2}$ con $-\sqrt{5}$, si farà $\sqrt{2} - \sqrt{5}$.

ARTICOLO XII.

Modo di sottrarre le quantità radicali.

947. PRob. Debbasi sottrarre una quantità radicale da un'altra.

948. Risol. Si riducano primieramente le date quantità radicali allo stesso esponente qualora non siano dello stesso esponente, poscia all' espressione più semplice, indi si osservi se sono, o non sono communicanti. Se non sono communicanti, s'indichi la sottrazione mediante il segno −: Come dovendosi sottrarre $2\sqrt{2}$ da $3\sqrt{5}$, si farà $3\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$, ovvero $\sqrt{45} - \sqrt{8}$. Se poi sono communicanti si sottri un coefficiente dall' altro, e il residuo si prefigga al vincolo, cui si dia la comune quantità radicale. Come dovendosi sottrarre $\sqrt{8}$ da $\sqrt{50}$, perchè $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, e $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, si avrà $3\sqrt{2}$, perchè coi sottrarsi 2 da 5 resta 3.

949. La prima parte non ha bisogno di dimostrazione, la seconda è evidente, perchè col sottrarsi due volte il $\sqrt{2}$ da cinque volte il $\sqrt{2}$, rimane tre volte il $\sqrt{2}$.

950.

950. Se le quantità radicali da sottrarsi saranno più d'una, una cosa devesi osservare, la quale ha luogo ancora nella sottrazione di qualunque altra quantità composta di più parti unite per mezzo de' segni $+$, e $-$, ed è, che nella sottrazione devonsi mutare tutti i segni della quantità sottraenda, cioè quelli, che sono $+$ in $-$, e quelli, che sono $-$ in $+$. Come dovendosi sottrarre $\sqrt{12} - \sqrt{8}$ da $\sqrt{75} + \sqrt{18}$, che ridotti alla più semplice espressione sono $2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$, $5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$, si farà $5\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$, cioè $3\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$.

951. Che poi nel sottrarsi una quantità da un'altra si debba mutare il segno alla quantità sottraenda, cioè se ha il segno $+$ si debba cambiare in $-$; e se ha il segno $-$ si debba cambiare in $+$, lo dimostro. E quanto alla prima parte egli è evidente, che avendo il segno $+$, egli si deve cambiare in $-$, poichè colla sottrazione non altro volendosi, che levare una quantità da un'altra, ed il segno $-$ esprimendo un difetto (giusta il num: 52.), ben si vede, che alla quantità sottraenda, la quale deve esprimere un difetto dell' altra quantità, da cui devesi fare la sottrazione, hassi a cambiare il segno $+$ in $-$. Quanto poi alla seconda parte, cioè, che se la quantità sottraenda ha il segno $-$, egli si debba cambiare in $+$ nel fare la sottrazione si rende manifesto coll' osservare, che come pur ora ho detto, mediante la sottrazione non altro vuolsi, che levare una quantità da un'altra: Ma (pel num. 52.) il segno $-$ esprimendo un difetto, quando da una quantità se ne vuole sottrarre un'altra affetta dal segno $-$, egli è un volerci levare questo difetto; e siccome il sottrarre un difetto non è altro, che sostituire altrettanto, però volendosi sottrarre una quantità affetta dal segno $-$, bisognerà cambiarci il detto segno $-$ in $+$. Lo che si doveva dimostrare.

952. Dovendosi sottrarre una quantità razionale da una radicale, o una radicale da una razionale si farà uso del segno $-$, qualora la quantità sottraenda non fosse affetta dal segno $-$ giusta il num. 950.

ARTICOLO XIII.

Modo di moltiplicare le quantità radicali.

953. PRima di dare le regole della moltiplicazione bisogna premettere qualche cosa circa il segno $+$, o $-$, che devesi dare al prodotto relativamente al segno, che hanno i fattori. Questi fattori pertanto o possono avere tutti due il segno $+$, o tutti due il segno $-$, o uno il segno $+$, e l' altro il segno $-$.

954. Se ciascuno de' due fattori ha il segno $+$, il prodotto dovrà avere il segno $+$. Lo che dimostro così. Pel num. 104. il moltiplicare non è altro, che prendere tante volte un fattore quante unità sono nell' altro; ma perchè (per Ipotesi) questi due fattori hanno lo stesso segno $+$, però bisognerà prendere tante volte un fattore col suo segno $+$, quante sono le unità dell' altro fattore, e conseguentemente il prodotto dovrà avere il segno $+$.

955. Quando poi ciascuno de' due fattori ha il segno $-$, che il prodotto debba avere il segno $+$, lo dimostro. Poichè questi due fattori hanno il segno $-$, essi esprimono due difetti (giusta il num. 52.); dunque il moltiplicare uno di questi fattori nell' altro, altro non vorrà dire, che levare tante volte uno di questi fattori, cioè tale difetto, quante unità sono nell' altro; ma come pur ora ho detto il sottrarre un difetto è sostituire altrettanto; conseguentemente il prodotto dovrà avere il segno $+$

956

956. Finalmente quando un fattore ha il ſegno +, e l'altro il ſegno −, dimoſtro, che il prodotto dovrà avere il ſegno −. Col moltiplicarſi la quantità affetta dal ſegno − per la quantità affetta dal ſegno +, vienſi a porre tante volte tale difetto quante unità contiene la quantità affetta dal ſegno +; ma dalla reiterata poſizione di un difetto il riſultato è ſempre un difetto; dunque moltiplicandoſi una quantità affetta dal ſegno − per una affetta dal ſegno +, il prodotto dovrà eſſere affetto dal ſegno −. Lo che ſi doveva dimoſtrare.

957. Prob. Si debbano moltiplicare inſieme due quantità radicali.

958. Riſol. Se le date quantità radicali non hanno lo ſteſſo eſponente vi ſi riducano (pel num. 921.) indi ſi moltiplichino inſieme le quantità eſiſtenti ſotto i vincoli, e al prodotto ſi prefigga il vincolo radicale col ſuo eſponente, dandoci il corriſpondente ſegno (giuſta i num. 954, 955. 956.): Come dovendoſi moltiplicare $\sqrt{5}$ per $-\sqrt{30}$ il prodotto ſarà $-\sqrt{150}=-5\sqrt{6}$

959. Se il prodotto di due radicali ſarà tale, che vi ſi poſſa levare la radice indicata dall' eſponente del vincolo, tale radice ſarà il prodotto cercato: Come perchè il prodotto di $\sqrt{32}$ in $\sqrt{2}$ è $\sqrt{64}$, la di cui radice quadrata è 8, però il prodotto di $\sqrt{32}$ in $\sqrt{2}$ è 8.

960. Corol. Quindi il prodotto di un radicale moltiplicato in ſe ſteſſo ſi ha con cancellare il vincolo di tale radicale, ſuppoſto che l'eſponente del vincolo ſia 2. Onde il prodotto $\sqrt{7}$ moltiplicato in ſe ſteſſo è 7. Che ſe l'eſponente del vincolo ſarà 3, in tal caſo ſi avrà il prodotto di tale radicale moltiplicato due volte in ſe ſteſſo con levarci il vincolo: Per Eſempio il prodotto di $\sqrt[3]{20}$ moltiplicato due volte in ſe ſteſſo è 20.

961. Se al vincolo radicale ſarà prefiſſa qualche quantità, devonſi primieramente moltiplicare fra loro le quantità prefiſſe al vincolo: onde il prodotto di $\sqrt{3}$ in $4\sqrt{5}$ è $4\sqrt{15}$; ed il prodotto di $5\sqrt{7}$ in $3\sqrt{14}$ è $15\sqrt{98}$, ma $\sqrt{98}=7\sqrt{2}$, dunque $15\sqrt{98}=(15\times7)\sqrt{2}=105\sqrt{2}$.

962. Corol. Conſeguentemente quando il prodotto trovato avrà coefficiente, e la quantità ſotto al vincolo ſi potrà ridurre all' eſpreſſione più ſemplice, o pure vi ſi potrà aſſolutamente eſtrarre la radice indicata dall' eſponente del vincolo, ſi avrà il prodotto cercato con moltiplicare la trovata radice nel coefficiente: Per Eſempio il prodotto di $4\sqrt{12}$ in $6\sqrt{3}$ è $24\sqrt{36}$, cioè $24\times6=144$; ed il prodotto di $2\sqrt{5}$ in $4\sqrt{3}$ è $8\sqrt{18}$, cioè $8\times3\sqrt{2}$.

963. Dovendoſi moltiplicare una quantità razionale per una radicale, dovraſſi prefiggere al vincolo la quantità razionale: Così il prodotto di 5 in $\sqrt{11}$ è $5\sqrt{11}$, che ſe il radicale avrà coefficiente, ſi dovrà moltiplicare la data quantità razionale nel coefficiente: Onde il prodotto di 7 in $5\sqrt{13}$ è $35\sqrt{13}$.

ARTICOLO XIV.

Modo di dividere le quantità radicali.

964. QUi pure deveſi primieramente determinare qual ſegno debba avere il quoziente relativamente ai ſegni, che hanno il dividendo, e il diviſore.

965. Dico pertanto, che ſe tanto il dividendo, che il diviſore avranno il ſegno +, o il ſegno −, il quoziente avrà il ſegno +; ma ſe il dividendo avrà un ſegno, e il diviſore ne avrà un'altro, il quoziente dovrà avere il ſegno −.

966. Dim. Pei num. 954, 955 il prodotto di due quantità affette dai medesimi segni deve avere il segno +; e pel num. 956 il prodotto di due quantità affette da segni diversi deve avere il segno −: Ma (pel num. 132.) il dividendo è il prodotto, che nasce dal moltiplicarsi il quoziente nel divisore; dunque se il segno del dividendo sarà +, il segno del quoziente sarà eguale al segno del divisore; se poi il segno del dividendo sarà −, il segno del quoziente sarà contrario al segno del divisore; e però se il dividendo, e il divisore saranno affetti dal medesimo segno, il segno del quoziente dovrà essere +; se poi saranno affetti da segni contrarj, il segno del quoziente dovrà essere −. Lo che si doveva dimostrare.

967. Prob. si debba dividere una quantità radicale per un' altra.

968. Risol. Se le date quantità radicali non hanno lo stesso esponente, vi si riducano, lo che fatto si dividano le quantità esistenti sotto al vincolo, e al quoziente si prefigga il suo vincolo col conveniente segno (giusta il num. 965): Come dovendosi dividere $-\sqrt{21}$ per $\sqrt{3}$, il quoziente sarà $-\sqrt{7}$.

969. Se il quoziente nato dalla divisione di una quantità radicale per un' altra sarà una quantità tale, da cui levare si possa la radice indicata dall' esponente del vincolo, questa radice sarà il ricercato quoziente: Per Esempio perchè col dividersi $\sqrt{72}$ per $\sqrt{2}$ si ha di quoziente $\sqrt{36}=6$, però il quoziente nato dal dividersi $\sqrt{72}$ per $\sqrt{2}$ sarà 6.

970. Qualora i radicali avessero coefficienti, devonsi pure fra loro dividere questi coefficienti: Come dovendosi dividere $18\sqrt{60}$ per $6\sqrt{12}$, il quoziente sarà $3\sqrt{5}$.

971. Corol. Quindi se le quantità radicali, il di cui quoziente è la radice indicata dall' esponente del vincolo, avranno coefficienti, si avrà il ricercato quoziente con moltiplicare la detta radice nel quoziente de' coefficienti: E però il quoziente, che nasce dal dividersi $12\sqrt{8}$ per $3\sqrt{2}$ è $4\sqrt{4}=8$, perchè $\sqrt{4}=2$.

972. Dovendosi dividere una quantità razionale per una radicale, o una radicale per una razionale, si innalzi la quantità razionale alla potestà indicata dall' esponente del vincolo, poi si faccia la divisione come or ora si è detto: Per Esempio si debba dividere 4 per $\sqrt{2}$, si innalzi il 4 al quadrato, e si avrà $\sqrt{16}=4$, il quale diviso per $\sqrt{2}$ lascia di quoziente $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

973. Se dal dividersi o i coefficienti, o le quantità esistenti sotto al vincolo nascerà una frazione, tale frazione si inchiuda fra parentesi, o vi si tiri sopra una linea per indicare, che tutta la frazione appartiene al vincolo o come coefficiente, o come radicale: Per esempio dovendosi dividere $7\sqrt{21}$ per $3\sqrt{5}$ il quoziente sarà $(7:3)\sqrt{(21:5)}$, o pure $\overline{7:3}\sqrt{\overline{21:5}}$, o sia $\frac{7}{3}\sqrt{\frac{21}{5}}$

974. Ogniqualvolta dal numeratore, o dal denominatore della quantità esistente sotto al vincolo, o pure da tutti due si potrà levare la radice indicata dall' esponente del vincolo, ciò si faccia: Come perchè dalla divisione di $\sqrt{49}$ per $\sqrt{2}$ si ha $\sqrt{49.2}$, e $\sqrt{49}=7$, però il quoziente cercato sarà $7:\sqrt{2}$, o sia $\frac{7}{\sqrt{2}}$. Istessamente il quoziente di $\sqrt{34}$ diviso per $\sqrt{16}$ è $\sqrt{34:16}$, o $\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{34}}{4}$, o sia $\sqrt{34:4}$.

975. Istessamente si opera per dividere una quantità radicale composta di più parti unite co' segni +, o − per un' altra parimente composta. Come dovendosi.

dosi dividere $3\sqrt{21}-6\sqrt{35}+\sqrt{6}-2\sqrt{10}$ per $\sqrt{3}-2\sqrt{5}$, comincio a dividere il primo termine $3\sqrt{21}$ del dividendo pel primo termine $\sqrt{3}$ del divisore, e il quoziente $+3\sqrt{7}$ lo noto da parte, poscia moltiplico questo quoziente in tutto il divisore, e il prodotto $3\sqrt{21}-6\sqrt{35}$ lo sottro dal dividendo, onde mi rimane $\sqrt{6}-2\sqrt{10}$: divido pertanto il primo termine $\sqrt{6}$ di questo residuo pel primo termine $\sqrt{3}$ del divisore, e mi viene di quoziente $\sqrt{2}$, che col suo conveniente segno + scrivo appresso all'altra parte $3\sqrt{7}$ del quoziente; poscia moltiplico il pur ora trovato quoziente $+\sqrt{2}$ nel divisore, e perchè fatta la sottrazione di questo prodotto $+\sqrt{6}-2\sqrt{10}$ nulla rimane, però il cercato quoziente sarà $3\sqrt{7}+\sqrt{2}$. Ecco il Calcolo

	Divisore	Dividendo	
	$\sqrt{3}-2\sqrt{5}$	$3\sqrt{21}-6\sqrt{35}+\sqrt{6}-2\sqrt{10}$	
Prodotto del quoz. $3\sqrt{7}$ nel divis.		$3\sqrt{21}-6\sqrt{35}$	
	Residuo	o o $+\sqrt{6}-2\sqrt{10}$)	Quoziente
Prodotto del quoz. $\sqrt{2}$ nel divisore		$+\sqrt{6}-2\sqrt{10}$)	$3\sqrt{7}+\sqrt{2}$.
	Residuo	o o	

976. Quando non si può fare l'attuale divisione, devesi indicare con scrivere il divisore sotto il dividendo separato da una linea: Come dovendosi dividere $2\sqrt{5}-7\sqrt{11}$ per $\sqrt{3}$ si farà $\frac{2\sqrt{5}-7\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$.

ARTICOLO XV.

Modo d' innalzare a qualunque potestà le quantità radicali.

977. PRob. Debbasi elevare a una data potestà una quantità radicale.

978. Risol. Si innalzi alla potestà cercata la quantità esistente sotto al vincolo, indi vi si prefigga lo stesso vincolo, che già aveva: Nel qual modo il quadrato di $\sqrt[3]{7}$ sarà $\sqrt[3]{49}$.

979. Se il proposto radicale avrà coefficiente, tale coefficiente devesi pure innalzare alla potestà cercata; quindi il cubo di $4\sqrt{2}$ sarà $64\sqrt{8}=128\sqrt{2}$.

980. Quando l'esponente della potestà cercata sarà eguale all'esponente del vincolo, si avrà la potestà cercata con levare il vincolo alla data quantità radicale (giusta il num. 960.)

981. Che se l'esponente della potestà cercata sarà moltiplice dell'esponente del vincolo, si avrà tale potestà, se cancellato il vincolo radicale, si innalzerà la quantità radicale alla potestà indicata dal quoziente nato dalla divisione degli esponenti: Come dovendosi elevare $\sqrt{6}$ alla sesta potestà, si avrà $6^3=216$, perchè $\sqrt{6}^6=6^3$. Così la quarta potestà di $2\sqrt{3}$ sarà $16\sqrt{3}^4=16\text{X}3^2=16\text{X}9=144$.

982. Istessamente si opererà per innalzare a qualche potestà una quantità radicale composta di più parti; o pure una quantità composta di radicali; e di raziona-

zionali. Debbasi per Esempio innalzare al quadrato la quantità $7+3\sqrt{5}-2\sqrt{10}$, lo che si ottiene con moltiplicare in se stessa tale quantità, moltiplicando cioè col primo termine 7 tutta la quantità, onde si ha $49+21\sqrt{5}-14\sqrt{10}$; indi moltiplicarla col secondo termine $3\sqrt{5}$, dalla quale moltiplicazione ne viene $21\sqrt{5}+45-6\sqrt{50}$, ma perchè $6\sqrt{50}$ è $=30\sqrt{2}$, però tale prodotto sarà $21\sqrt{5}+45-30\sqrt{2}$; finalmente devesi moltiplicare la quantità data nell'ultimo termine $-2\sqrt{10}$, dal che ne viene $-14\sqrt{10}-30\sqrt{2}+40$; e però la cercata potestà seconda sarà $49+21\sqrt{5}-14\sqrt{10}+21\sqrt{5}+45-30\sqrt{2}-14\sqrt{10}-30\sqrt{2}+40$, cioè, fatta la riduzione de' termini, $134+42\sqrt{5}-28\sqrt{10}-60\sqrt{2}$. Ecco il Calcolo in cui vedesi ancora come debbasi operare nella moltiplicazione de' radicali composti di più parti.

$$\begin{array}{l} 7+3\sqrt{5}-2\sqrt{10} \\ 7+3\sqrt{5}-2\sqrt{10} \\ \hline 49+21\sqrt{5}-14\sqrt{10} \\ \quad +21\sqrt{5} \qquad\qquad -6\sqrt{50}=-30\sqrt{2} \\ \quad 9\times 5 \qquad\quad -14\sqrt{10}-6\sqrt{50}=-30\sqrt{2} \\ \quad 4\times 10 \\ \hline \end{array}$$

Potestà seconda. $49+45+40+21\sqrt{5}+21\sqrt{5}-14\sqrt{10}-14\sqrt{10}-30\sqrt{2}-30\sqrt{2}$, cioè $134+42\sqrt{5}-28\sqrt{10}-60\sqrt{2}$.

ARTICOLO XVI.

Modo di estrarre qualunque radice da una quantità radicale.

983. PRob. Debbasi estrarre una cercata radice da una quantità radicale di un solo termine.

984. Risol. Se dalla quantità esistente sotto al vincolo si può levare la cercata radice, ella si estragga, e poi vi si prefigga lo stesso vincolo, che accompagnava la quantità proposta, nel qual modo la radice cuba di $\sqrt{27}$ sarà $\sqrt{3}$: Se poi dalla quantità esistente sotto al vincolo non si potrà estrarre la cercata radice, basterà moltiplicare l'esponente del vincolo radicale nell'esponente della cercata radice: Onde la radice cuba di $\sqrt{17}$ sarà $\sqrt[6]{17}$: Ovvero si esprima la cercata radice mediante doppio vincolo così $\sqrt[3]{\sqrt{17}}$; e queste si chiamano radici di radici, ovvero radicali universali.

985. Dim. La prima parte è manifesta, la seconda parte poi costa dal num. 887, mentre l'esponente della radice cercata deve essere il quoziente, che nasce dal dividersi l'esponente della quantità data per l'esponente, cui si riferisce la radice cercata; ma perchè l'esponente di una quantità radicale espressa a modo di potestà è una frazione, che ha per numeratore l'esponente di tale quantità, e per denominatore l'esponente del vincolo; dunque se da tale quantità radicale dovrassi estrarre un'altra cercata radice, bisognerà moltiplicare l'esponente, che si riferisce a questa radice, per l'esponente del vincolo radicale. Lo che si doveva dimostrare.

986. Corol. Due cose pertanto rendonsi manifeste: Primieramente che si potrà sempre quando si voglia ridurre a radice prima una radice di radice con moltiplicare gli esponenti de' vincoli. Secondariamente, che la radice, qualunque ella sia, di una quantità radicale è sempre un radicale.

987. Se la data quantità radicale avrà coefficiente, dovrassi pure estrarre la cercata radice anche dal coefficiente, e non potendosi, si deve ridurlo sotto al vincolo, e poi operare giusta il num. 984.

988. Dovendosi estrarre una cercata radice da una quantità radicale composta di più parti, si faccia uso del vincolo universale, tirando una linea sopra tutte le quantità, a cui si estende: Come volendosi estrarre la radice quadrata da $\sqrt{8} - 5\sqrt{17} + 2\sqrt{3}$ si farà $\sqrt{\sqrt{8} - 5\sqrt{17} + 2\sqrt{3}}$. Lo stesso si faccia se vi saranno parti razionali; come volendosi la radice cuba di $11 + \sqrt{6}$ si farà $\sqrt[3]{11 + \sqrt{6}}$. Non è già, che molte volte non si possa atualmente estrarre da queste quantità la cercata radice, ma perchè tali operazioni in Aritmetica non succedono, però basti l' avere indicato il modo di esprimere tali radici.

ARTICOLO XVII.

Dei radicali Universali, e del loro Calcolo.

989. Abbiamo veduto al num. 984. cosa siano questi radicali universali, cioè non sono altro, che l'espressione di una cercata radice, che non si può estrarre da una quantità radicale.

990. Per esprimere il doppio; il triplo; il quadruplo ec. di un radicale universale, per Esempio di $\sqrt{2 + \sqrt{6}}$ si fa $2\sqrt{2 + \sqrt{6}}$; $3\sqrt{2 + \sqrt{6}}$; $4\sqrt{2 + \sqrt{6}}$ ec.

991. Per ridurre alla più semplice espressione un radicale universale si opera giusta il numero 929, avvertendo però di ridurre prima alla più semplice espressione i radicali esistenti sotto ai vincoli peculiari. Si debba per Esempio ridurre alla più semplice espressione il radicale $\sqrt{8 + \sqrt{96}}$, perchè $\sqrt{96}$ è $= 4\sqrt{6}$, egli farà $\sqrt{8 + \sqrt{96}} = \sqrt{8 + 4\sqrt{6}}$, e però ridotto alla più semplice espressione farà $2\sqrt{2 + \sqrt{6}}$. Così dovendosi ridurre alla più semplice espressione il radicale $\sqrt{12 + \sqrt{32} + \sqrt{80}}$, perchè $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, e $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$, farà il dato radicale $\sqrt{12 + \sqrt{32} + \sqrt{80}} = \sqrt{12 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{5}}$; che ridotto alla più semplice espressione è $2\sqrt{3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}}$. Che se farà dato da ridursi alla più semplice espressione il radicale seguente $\sqrt{12 + \sqrt{32 + \sqrt{1280}}}$ poichè $\sqrt{1280} = 16\sqrt{5}$, e $\sqrt{32 + 16\sqrt{5}} = 4\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ farà $\sqrt{12 + \sqrt{32 + \sqrt{1280}}} = \sqrt{12 + 4\sqrt{2 + \sqrt{5}}}$, che ridotto alla più semplice espressione è $2\sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{5}}}$.

992. Dal metodo tenuto nel precedente numero per ridurre un radicale universale alla più semplice espressione s'intende, come debbasi operare per ridurre sotto i vincoli di un radicale universale un qualche suo coefficiente.

993. Trattandosi di ridurre alcuni radicali universali allo stesso esponente, si opera giusta il num. 921.

994. Per fare la somma, o la sottrazione di alcuni radicali universali devonsi prima ridurre alla più semplice espressione, lo che fatto, se sotto al vincolo universale si troveranno le stesse quantità, si farà la somma, o la sottrazione dei proposti radicali universali mediante la somma, o la sottrazione de' coefficienti: Se poi fatta la riduzione all'espressione più semplice, non si troveranno le stesse quantità sotto al vincolo universale, si farà la somma, o la sottrazione, o sia s'indicherà mediante i segni $+$, $-$.

995. Si farà la moltiplicazione de' radicali universali con ridurli prima, se v'è il bisogno allo stesso esponente, indi moltiplicare vicendevolmente fra loro sì i coefficienti, come le quantità esistenti sotto al vincolo. Eccone l'Esempio.

Moltiplicando $2\sqrt{3+\sqrt{3}}$

Moltiplicatore $5\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$$10\sqrt{6}+2\sqrt{3}$$
$$+3\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

Prodotto $10\sqrt{6+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

996. Parimente debbasi moltiplicare $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{3}}}$ per $\sqrt{5+\sqrt{2+\sqrt{7}}}$. Ecco il Calcolo.

Moltiplicando $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{3}}}$

Moltiplicatore $\sqrt{5+\sqrt{2+\sqrt{7}}}$

$$\sqrt{10+5\sqrt{3+25\sqrt{3}}}$$
$$2\sqrt{2+4\sqrt{7}}$$
$$\sqrt{6+2\sqrt{3}+3\sqrt{7}+\sqrt{21}}$$

Prodotto $\sqrt{10+5\sqrt{3}+25\sqrt{3}+2\sqrt{2}+4\sqrt{7}+\sqrt{6+2\sqrt{3}+3\sqrt{7}+\sqrt{21}}}$

997. Non è punto differente dal metodo dato al num. 968. il modo di dividere i radicali universali, supposto che abbiano lo stesso esponente: Come dovendosi dividere $\sqrt{15+\sqrt{7}}$ per $\sqrt{3}$, il quoziente sarà $\sqrt{5+\sqrt{\frac{7}{3}}}$. Parimente si debba dividere $\sqrt{18+3\sqrt{2}-6\sqrt{8}-\sqrt{16}}$ per $\sqrt{6+\sqrt{2}}$; Si cominci a dividere il pri-

primo termine 18 del dividendo pel primo termine 6 del divisore, e il quoziente $\sqrt{3}$ si noti da parte poscia si moltiplichi questo quoziente $\sqrt{3}$ nel divisore, e il prodotto $\sqrt{18+3\sqrt{2}}$ si sottri dal dividendo, con che rimane $-6\sqrt{8}-\sqrt{16}$. Divido pertanto il primo termine $-6\sqrt{8}$ di questo residuo pel primo termine $\sqrt{6}$ del divisore, e il quoziente $-\sqrt{8}$, che ne nasce, lo scrivo appresso all'altra parte trovata $\sqrt{3}$, indi con questo quoziente $-\sqrt{8}$ moltiplico il divisore, e il prodotto $-6\sqrt{8}-\sqrt{16}$ sottro al solito, e perchè nulla rimane, sarà perciò $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ il quoziente cercato. Ecco il Calcolo.

Divisore	Dividendo	
$\sqrt{6+\sqrt{2}}$	$\sqrt{18+3\sqrt{2}-6\sqrt{8}-\sqrt{16}}$	
Prodotto del quoz. $\sqrt{3}$ nel divisore	$\sqrt{18+3\sqrt{2}}$	Quoz. $\sqrt{3-\sqrt{8}}$
Residuo	$0 \quad 0 \; -6\sqrt{8}-\sqrt{16}$	
Prodotto del quoz. $-\sqrt{8}$ nel divisore	$-6\sqrt{8}-\sqrt{16}$	
Residuo	$0 \quad 0$	

998. Dalle cose dette ai num. 995, e 996 per la moltiplicazione de' radicali universali costa, come si debba regolare per innalzare a una cercata potestà un dato radicale universale.

999. Per estrarre poi da un dato radicale universale una cercata radice, basterà dare per nuovo esponente al vincolo universale il prodotto, che nasce dal moltiplicarsi l'esponente del vincolo universale per l'esponente, a cui si riferisce la cercata radice: Onde la radice quadrata di $\sqrt[3]{16+8\sqrt{6}}$ è $\sqrt[6]{16+8\sqrt{6}}$.

1000. Qui poi si osservi, che quando viene proposto di levare una cercata radice da un radicale universale, come sarebbe da $\sqrt{13+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ non s'intende, che alla radice di 13 si debba aggiungere la radice di 2, e di 5, ma che al 13 si deve aggiungere la radice di 2, e di 5, e poi dal numero, che ne risulta si deve levare la cercata radice.

TA-

TAVOLA

Delle Poteſtà de' primi dieci numeri dalla prima ſino alla duodecima.

Radici.	Poteſtà II.	Poteſtà III.	Poteſtà IV.	Poteſtà V.	Poteſtà VI.
1.	1	1	1	1	1
2.	4	8	16	32	64
3.	9	27	81	243	729
4.	16	64	256	1024	4096
5.	25	125	625	3125	15625
6.	36	216	1296	7776	46656
7.	49	343	2401	16807	117649
8.	64	512	4096	32768	262144
9.	81	729	6561	59049	531441
10.	100	1000	10000	100000	1000000

Radici.	Poteſtà VII.	Poteſtà VIII.	Poteſtà IX.
1.	1	1	1
2.	128	256	512
3.	2187	6561	19683
4.	16384	65536	262144
5.	78125	390625	1953125
6.	279936	1679616	10077696
7.	823543	5764801	40353607
8.	2097152	16777216	134217728
9.	4782969	43046721	387420489
10.	10000000	100000000	1000000000

Radici.	Poteſtà X.	Poteſtà XI.	Poteſtà XII.
1.	1	1	1
2.	1024	2048	4096
3.	59049	177147	531441
4.	1048576	4194304	16777216
5.	9765625	48828125	244140625
6.	60466176	362797056	2176782336
7.	282475249	1977326743	13841287201
8.	1073741824	8589934592	68719476736
9.	3486784401	31381059609	282429536481
10.	10000000000	100000000000	1000000000009

CA-

CAPO V.

DELLE PROGRESSIONI ARITMETICHE, E GEOMETRICHE.

ARTICOLO I.

Della Progressione Aritmetica.

1001. DEf. 1. La progressione Aritmetica non è altro, che una moltitudine di termini in continua proporzione Aritmetica (giusta il num. 400.). Ecco varie Progressioni Aritmetiche.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.	20.	22.	24.	ec.
1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.	17.	19.	21.	23.	
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.	30.	33.	36.	

1002. Def. 2. La differenza, che passa tra ciascun termine della Progressione, dicesi il suo esponente. Questo esponente poi, siccome il primo termine della Progressione si possono prendere a piacere; e secondo la diversità dell' esponente diverse risultano le Progressioni.

1003. Def. 3. Ciascun numero, che compone la Progressione, si chiama termine della progressione. Tutti i termini poi posti fra il primo, e l'ultimo di una progressione aritmetica si chiamano medii proporzionali aritmetici.

1004. Def. 4. Quella progressione, il di cui esponente, e il primo termine, è l'unità, si chiama progressione aritmetica naturale. Quella, il di cui primo termine è l' unità, e l'esponente è 2, si chiama progressione naturale impari. Quella poi, il di cui primo termine è 2, e l' esponente parimente 2, si dice progressione naturale di numeri pari.

1005. Si osservi, che col sommarsi insieme per ordine i termini di due, o più progressioni aritmetiche, ne risulta sempre un' altra progressione parimente aritmetica, il di cui esponente è la somma degli esponenti delle progressioni sommate insieme.

1006. Che se in vece di sommare si moltiplicheranno insieme per ordine i termini di due, o più progressioni aritmetiche, con questo però, che l' esponente dell'una, e dell'altra sia lo stesso, ne risulterà una serie, di cui le differenze prime (se le progressioni moltiplicate sono due) formeranno una progressione aritmetica: Come essendo le due Progressioni

	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.	17.	19.
	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.	17.	19.
Prodotti	1.	9.	25.	49.	81.	121.	169.	225.	289.	361.
Differenze prime	8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	72.	

Progreffioni	2.	5.	8.	11.	14.	17.	20.	23.
	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22.	25.
Prodotti	8.	35.	80.	143.	224.	323.	440.	575.
Differenze prime	27.	45.	63.	81.	99.	117.	135.	

Se le moltiplicate progreffioni aritmetiche d'efponente eguale faranno tre, ne rifulterà una tal ferie, di cui le differenze feconde formeranno una progreffione aritmetica: Come effendo propofte le tre feguenti progreffioni

Progreffioni	1.	6.	11.	16.	21.	26.
	3.	8.	13.	18.	23.	28.
	7.	12.	17.	22.	27.	32.
Prodotti	21.	576.	2431.	6336.	13041.	23296.
Differenze prime	555.	1855.	3905.	6705.	10255.	
Differenze feconde	1300.	2050.	2800.	3550.		

Se faranno quattro le moltiplicate progreffioni aritmetiche d'efponente eguale, ne rifulterà una tal ferie, le di cui differenze terze formeranno una progreffione aritmetica. Se le moltiplicate progreffioni aritmetiche faranno cinque, ne nafcerà una tal ferie, le di cui differenze quarte faranno in progreffione aritmetica. E generalmente fe fi moltiplicheranno per ordine i termini di quante fi vogliono progreffioni aritmetiche dello fteffo efponente, fi avrà una tal ferie, le di cui differenze denominate dal numero delle progreffioni infieme moltiplicate diminuito di una unità faranno in progreffione aritmetica.

1007. Le fteffe regole hanno luogo quantunque le progreffioni aritmetiche da moltiplicarfi ordinatamente infieme, fiano di diverfo efponente.

1008. Def. 5. Progreffione crefcente o afcendente, è quella, il di cui efponente aggiungefi fucceffivamente a ciafcun termine per avere il termine fuffeguente: Come effendo dato per una progreffione il primo termine 2, e l'efponente 3 ella farà.

$$2. \quad 2+3. \quad 5+3. \quad 8+3. \quad 11+3. \quad 14+3. \quad 17+3. \quad 20+3 \text{ ec.}$$

1009. Quefta definizione, che fomminiftra la giufta idea delle progreffioni aritmetiche afcendenti, è il fondamento della maggior parte delle operazioni, che fi fanno circa le progreffioni aritmetiche, nelle quali cinque cofe devonfi confiderare, cioè il primo termine; l'ultimo termine; il numero de'termini; l'efponente; e la fomma della progreffione, delle quali cofe, effendone date alcune, fi troveranno agevolmente, colla fcorta della pur ora data definizione, le altre, al qual fine ne deduco i feguenti evidentiffimi corollarii.

1010. Corol. 1. Poichè non vi è termine, a cui aggiungere non fi poffa l'efponente della progreffione, quindi effendo dato il primo termine di una progreffione aritmetica afcendente, e il fuo efponente, fi potrà ella con termini fempre afcendenti continuare all'infinito, aggiungendo cioè l'efponente al primo termine, onde fi abbia il fecondo, a cui con aggiungere l'efponente fi ha il terzo ec., come fi è accennato al num. 1008.

1011.

1011. Corol. 2. Ora perchè coll'aggiungersi l'esponente a qualsivoglia termine si ha il termine susseguente, rendesi evidente, che il secondo termine della progressione sarà eguale alla somma del primo, e dell'esponente; il terzo termine, che risulta dal secondo sommato coll'esponente, sarà eguale alla somma del primo termine, e dell' esponente preso due volte; il quarto termine sarà eguale alla somma del primo termine, e dell' esponente preso tre volte ec. Dal che s'intende, che a parlare propriamente non v'è altra progressione aritmetica, che la progressione naturale 1. 2. 3. 4. 5. ec.; imperocchè o la progressione comincia dal zero, come 0. 3, 6. 9. 12. 15. 18. ec.; o comincia da qualche quantità, come 2. 6. 10. 14. 18. 22. ec., delle quali la prima è 1×3. 2×3. 3×3. 4×3. 5×3. 6×3. ec.; e la seconda è 2. 1×4 + 2. 2×4 + 2. 3×4 + 2. 4×4 + 2. 5×4 + 2. ec., in ciascuna delle quali ha luogo la sola progressione naturale, essendo quantità costanti le altre, che hanno luogo in ciascun termine, come ne' due dati esempii abbastanza si vede.

1012. Corol. 3. Quindi essendo dato il primo termine, e l' esponente di una progressione si avrà qual termine più piaccia con aggiungere al dato primo termine il prodotto, che nasce dal moltiplicarsi l' esponente nel numero del termine proposto diminuito di una unità.

ESEMPIO.

Prob. 1. Cercasi quante pertiche percorrerà un corpo grave cadente nel decimosettimo secondo, mentre nel primo minuto secondo percorrendo una pertica, le pertiche percorse ne' susseguenti minuti secondi sono, giusta la legge del Galileo, come i numeri della progressione naturale impari 1. 3. 5. 7. 9. ec. Poichè di questa progressione l'esponente è 2, si moltiplichi questo 2 nel numero del termine dato 17 diminuito di una unità, onde diventerà 16, e al prodotto 32 si aggiunga il primo termine 1 della progressione, con che si avrà 33; e però nel decimosettimo minuto secondo il detto corpo percorrerà 33 pertiche. Di fatto se si prolungherà la progressione fino al decimosettimo termine, si troverà, che egli è 33, come qui si vede.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. 29. 31. 33.

1013. Corol. 4. Dato essendo pertanto l'esponente, e il massimo termine di una progressione, se si dividerà questo massimo termine per l'esponente, e la divisione si faccia perfettamente, il quoziente darà il numero de' termini, e l'esponente sarà eguale al primo, o sia minimo termine: Ma se la divisione non si farà perfettamente, il residuo sarà il minimo termine, e il quoziente accresciuto di una unità darà il numero de' termini.

1014. Corol. 5. Ora pel num. 1012., dato l' esponente, il numero de' termini, e il minimo termine, si ha il modo di avere il massimo termine; e pel num. 1013., dato l'esponente, e il massimo termine, si ha il modo di avere il minimo termine.

1015. Corol. 6. Che se sarà dato il numero de' termini, il massimo, e il minimo termine di una progressione, si avrà l'esponente con levare il minimo termine dal massimo, e poscia dividere il residuo pel numero de' termini diminuito di una unità, mentre il quoziente darà l'esponente cercato.

1016. Corol. 7. Se poi sarà dato l'esponente, il massimo, e il minimo termine, si avrà il numero de' termini con levare dal massimo il minimo termine, indi dividere il residuo per l'esponente, e il quoziente accresciuto di una unità darà il cercato numero de' termini.

ESEMPIO.

Prob. 2. Un Lavorante nello scavo di un Pozzo ha guadagnato giusta l'accordo 40 lire nel primo giorno, e 90 nell'ultimo: in ciascun giorno poi ha guadagnato tanto, quanto nel precedente con l'aumento di 5 lire; cercasi quanti giorni egli abbia impiegato in questo lavoro. Poichè in questo problema non altro cercasi, che il numero de' termini della progressione, dal 90 si sottri il 40, ed il residuo 50 si divida per 5 esponente della progressione, e il quoziente 10. accresciuto di una unità, onde sia 11, darà il cercato numero de' giorni. Di fatto se si formerà la progressione col primo termine 40, e coll'esponente 5, si troverà, che vi vogliono 11. termini per arrivare al 90, così

40. 45. 50. 55. 60. 65. 70. 75. 80. 85. 90.

1017. Corol. 8. Essendo dati il massimo termine, l'esponente, e il numero de' termini, si avrà il minimo termine con sottrarre dal massimo termine il prodotto dell'esponente nel numero de' termini diminuito di una unità, mentre il residuo sarà il minimo termine cercato: Come rispetto all'Esempio precedente essendo dato il numero de' giorni 11 impiegati nel lavoro, l'esponente 5 della progressione, e la paga di lire 90 corrispondente all'ultimo giorno, se si cercherà quanta sia stata la paga accordata pel primo giorno, basterà moltiplicare l'esponente 5 in 10 numero de' giorni diminuito di una unità, che è appunto $11 - 1 = 10$, e il prodotto 50 levarlo da 90, onde ne rimane 40, e però 40 lire sono state l'accordo del primo giorno.

1018. Def. 6. Progressione aritmetica decrescente, o discendente è quella, il di cui esponente viene sempre levato da ciascun termine per avere il susseguente, come sarebbe

$$40.\quad 40-4.\quad 36-4.\quad 32-4.\quad 28-4.\quad 24-4.\quad 20-4.\quad 16-4.\quad 12-4.\ \text{ec.}$$

1019. Si potrebbero da questa definizione dedurre alcuni Corollarii relativamente a quelli, che si sono ricavati dal num. 1008., ma perchè ciò non involve alcuna difficoltà, li rimetto all'esercizio dello studioso. Osservo bensì, che nella progressione aritmetica discendente può svanire uno de' suoi termini, e farsi eguale a zero: In secondo luogo faccio riflettere, che la progressione aritmetica ascendente si può promuovere all'infinito con termini maggiori del zero, ma la progressione discendente non può andare all'infinito, che con termini presi in uno stato opposto.

1020. Teor. In qualsivoglia progressione aritmetica la somma di due termini quali si siano è eguale alla somma di altri due da essi egualmente distanti: O pure il doppio di un qualunque termine è eguale alla somma di altri due termini da esso lui egualmente distanti.

1021. Dim. Poichè i termini della progressione sono (pel num. 1001.) in continua proporzione aritmetica, e per altra parte i due termini presi in secondo luo-

go

go sono egualmente distanti dai due presi da prima, ovvero dal solo primieramente preso, mercè cui la differenza tra il primo, e il secondo sarà eguale alla differenza tra il terzo, e il quarto; o pure essendo tre i termini, tra il secondo, e il terzo, avvegnachè (pel num. 1011.) questa differenza sia eguale al prodotto dell' esponente della progressione moltiplicato nel numero de' termini, che passano fra il primo termine, e il secondo, o pure tra il terzo, e il quarto (giacchè per Ipotesi, distano egualmente) accresciuto di una unità; dunque questi quattro, o questi tre termini sono in proporzione, e conseguentemente (pel num. 406.) la somma degli estremi è uguale alla somma de' medii; o sia la somma de' medii; o sia la somma degli estremi è eguale (pel num. 408.) al doppio di quello di mezzo; e però in qualsivoglia progressione aritmetica la somma di due termini ec. Lo che si doveva dimostrare.

Per Esempio nella progressione del num. 1012 sarà $15 + 17 = 11 + 21 = 7 + 25 = 3 + 29$; e $19 + 19 = 17 + 21 = 13 + 25 = 5 + 33$ ec.

1022. Corol. 1. Poichè in qualunque progressione, il di cui numero de' termini sia pari, tante sono queste somme fra loro eguali, quanti sono gli ambi dei termini, e vi sono tanti ambi di termini, quanti ne indica la metà del numero de' termini, tante adunque saranno queste somme fra loro eguali, quante verranno indicate dalla metà del numero de' termini. Che se il numero de' termini sarà impari, tante saranno queste somme fra loro eguali, quante ne indica la metà del numero de' termini diminuito di una unità; alle quali somme poi devesi aggiungere la metà d' una di loro, o sia il termine di mezzo, a cui è eguale, e il quale non ha luogo negli ambi.

1023. Corol. 2. Quindi essendo dati il primo, e l' ultimo termine, e il numero de' termini, si avrà la somma di tutti i termini della progressione con moltiplicare il numero de' termini nella metà della somma del primo, e dell' ultimo termine: Per esempio se si fosse cercato al num. 1016. quanto sia per costare il proposto scavo, non altro avrebbesi dovuto fare, che sommare insieme il primo, e l' ultimo termine così $40 + 90 = 130$, indi prendere la metà di questa somma, che è 65, e moltiplicarla in 11 numero de' termini, dal che ne viene $65 \times 11 = 715$ somma cercata, o sia costo di tutto lo scavo.

Corol. 3. Che se sarà dato il primo termine, l' esponente, e il numero de' termini, si avrà la somma della progressione, con trovare prima il massimo termine (pel num. 1012.), indi la detta somma (pel num. 1023.)

1024. Corol. 3. Poichè (pel num. 1012.) per avere il massimo termine di una progressione si deve aggiungere al minimo termine il prodotto dell' esponente moltiplicato nel numero de' termini diminuito di una unità; e per avere la somma della progressione si deve moltiplicare (pel num. 1023.) il numero de' termini nella metà della somma del primo, e dell' ultimo termine; quindi la somma della progressione aritmetica è eguale al prodotto del primo termine moltiplicato nel numero de' termini, più il prodotto dell' esponente nella metà del quadrato del numero de' termini, quale quadrato sia diminuito del medesimo numero de' termini. Prendo l' Esempio dalla progressione del num. 1016, di cui il primo termine è 40, l' esponente è 5, e il numero de' termini è 11; onde la somma di tale progressione sarà $40 \times 11 + \frac{11 \times 11 - 11}{2} \times \overline{5} = 440 + \frac{110 \times 5}{2} = 440 + 275 = 715$. Il calcolo renderà la cosa più evidente. Pel num. 1012 il massimo termine del-

della proposta progressione è $40 + 5 \times \overline{11 - 1}$; onde la somma del massimo, e del minimo termine sarà $40 + 40 + 5 \times \overline{11 - 1}$, la di cui metà, cioè $40 + \frac{5 \times \overline{11 - 1}}{2}$, moltiplicata in 11 numero de' termini dà la somma cercata, cioè $40 \times 11 + \frac{\overline{11 \times \overline{11 - 11}}}{2} \times 5 = 440 + \frac{110 \times 5}{2} = 440 + 275 = 715$.

1025. Corol. 5. Quindi la somma della progressione naturale impari principiante dall' unità sarà eguale al quadrato del numero de' termini. Si voglia per Esempio sapere quale sarà l' intero spazio percorso in diecisette secondi dal grave cadente, di cui abbiamo parlato al num. 1012. Poichè il numero de' termini della progressione è 17, si moltiplichi in se stesso questo 17, e il prodotto 289 darà l' intero numero delle pertiche percorse dal detto grave nel tempo di 17 secondi, lo che concorda colla dottrina del Galileo, che gli spazii percorsi da un grave cadente sono come i quadrati de' tempi. Si formi il calcolo: Perchè il primo termine della progressione è 1, l' esponente è 2; il numero de' termini 17, la somma cercata sarà pel num. 1024

$$1 \times 17 + \frac{\overline{\overline{17} \times \overline{17 - 17}}}{2} \times 2 = 17 + \overline{17} \times \overline{17} - 17 = 17 \times 17.$$

1026. Corol. 6. E però data la somma di una progressione aritmetica naturale impari, se da questa somma si estrarrà la radice quadrata, tale radice darà il numero de' termini sommati, con che si risolve il Problema, in cui viene proposto di ritrovare un certo numero di termini in progressione aritmetica naturale impari, de' quali la somma sia eguale a un dato numero quadrato.

1027. Corol. 7. Qualunque quadrato pertanto si risolve in una progressione aritmetica naturale impari, della quale il numero de' termini viene indicato dalla radice di tale quadrato: Per esempio il quadrato di 9, che è 81 si risolve nella seguente progressione 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17.

1028. Corol. 8. Che se il primo termine della progressione, il numero de' termini, e la metà dell' esponente saranno eguali, come nella seguente progressione 5. 15. 25. 35. 45. in cui il primo termine è 5, il numero de' termini è 5, e la metà dell' esponente è 5, la somma della progressione sarà eguale al cubo del numero de' termini, mentre sarà (pel num. 1024.)

$$5 \times 5 + \frac{10 \times \overline{\overline{5 \times 5} - 5}}{2} = 5 \times 5 + 5 \times \overline{\overline{5 \times 5} - 5} = 5 \times 5 + \overline{5} \times \overline{5} \times \overline{5} - \overline{5} \times \overline{5} = \overline{5} \times \overline{5} \times \overline{5}$$

1029. Corol. 9. Dal che s' intende, che ogni cubo si può risolvere in una progressione aritmetica, della quale il primo termine, la metà dell' esponente, e il numero de' termini siano eguali ciascuno alla radice di tale cubo: Come $8 = 2 + 6$; $27 = 3 + 9 + 15$; $64 = 4 + 12 + 20 + 28$.

Corol. Generalmente però a qualsivoglia potenza di una qualunque radice corrisponde nella serie naturale impari 1. 3. 5. 7. ec. un certo numero di termini consecutivi principianti o dall' unità, o da un termine intermedio della serie impari 1. 3. 5. 7. ec., secondo che l' esponente della potestà è pari, o impa-

pari, la di cui somma dà tale potenza. Ed ecco come. Se l'esponente della potestà proposta è pari, in tal caso tale potestà risulta dalla somma di tanti termini della serie naturale impari principiante dall' unità, quante unità contiene la radice quadrata di tale potestà, o sia quante unità contiene la potestà della radice data, della quale potestà l' esponente sia la metà dell' esponente della potestà proposta: Come dovendosi elevare il 7 alla sesta potestà, ella sarà eguale alla somma di tanti termini della serie naturale impari principiante dall' unità, quanti ne indica $7^{\frac{6}{2}} = 7^3 = 343$, cioè la somma di trecenquarantatre termini della serie naturale impari principiante dall' unità darà la sesta potestà di 7.

Che se la potestà proposta sarà d'esponente impari, in tal caso codesta potestà sarà bensì eguale alla somma di un certo numero di termini della serie naturale impari, ma questi termini non comincieranno dall' unità. Bisogna adunque determinare qual debba essere il primo termine, e quale il numero de' termini di questa serie da sommarsi. Quanto al primo termine egli sarà sempre eguale all' unità più il prodotto della radice data diminuita di una unità moltiplicata nella stessa radice elevato a una potestà, il di cui esponente è la metà dell' esponente della potestà proposta diminuito di una unità; quanto poi al numero de' termini egli viene determinato dal numero delle unità, che contiene la stessa radice elevata alla potestà, il di cui esponente è la metà dell'esponente della già detta potestà diminuito di una unità, per Esempio l'undecima potestà di 4 sarà eguale alla somma di una serie naturale impari, il di cui primo termine sarà $\overline{4 - 1} \times 4^{\frac{11-1}{2}} + 1 = 3 \times 4^5 + 1 = 3073$, e il di cui numero di termini sarà $4^{\frac{11-1}{2}} = 4^5 = 1024$.

Ora da questa dottrina ricavasi il modo d'innalzare una qualunque quantità a qualsivoglia potestà con maggiore speditezza, che con moltiplicare replicatamente la radice in se stessa, mentre non altro devesi fare, che (giusta il num. 1023.) prendere la somma di una progressione aritmetica, di cui l'esponente è 2, e di cui per le cose dette è dato il primo termine, e il numero de' termini. Per lo che la sesta potestà di 7 sarà (poichè il massimo termine della progressione è $1 + 2 \times 342 = 685$) $\frac{1 + 685}{2} \times 343 = 343 \times 343 = 117649$. E l'undecima potestà di 4 sarà (poichè il primo termine è 3073, e il numero de' termini è 1024, il massimo termine è $3073 + 2 \times 1023 = 5119$) $\frac{3073 + 5119}{2} \times 1024 = 4194304$.

1030. Corol. 10. Dati essendo il minimo termine, l'esponente, e il numero de' termini, si avrà (pel num. 1023.) la somma della progressione, trovandosi prima (pel num. 1014.) il massimo termine.

1031. Corol. 11. Che se saranno dati l'esponente, la somma, e il numero de' termini, si avrà la somma del massimo, e del minimo termine con dividere la somma pel numero de' termini, mentre il doppio di questo quoziente darà la somma del massimo, e del minimo. Pel numero poi 1012. si avranno separatamente il massimo, e il minimo, con moltiplicare cioè l'esponente nel numero de' termini diminuito di una unità, il di cui prodotto darà il massimo termine meno il minimo, quale se si sottrerà dalla somma del massimo, e del minimo, lascierà di residuo il doppio del minimo.

ESEM-

ESEMPIO.

Prob. 3. Vi è una Vasca d'acqua, che ha 12 cannoni, da quali in un'ora si tramandano 168 boccali d'acqua con questa legge, che il secondo cannone in un'ora tramanda due boccali più del primo, così il terzo due boccali più del secondo ec. Cercasi quanti boccali tramandi il primo, e susseguentemente tutti gli altri. Si divida la somma 168 per 12 numero de' termini, e del quoziente 14 si prenda il doppio, che è 28, da cui si sottri 22 prodotto di 12 − 1 nella differenza 2, e resterà 6, la di cui metà 3 è il numero de' boccali, che tramanda il primo cannone.

1032. Corol. 12. Qualora poi siano dati il massimo termine, il minimo, e la somma della progressione, si avrà il numero de' termini con sommare insieme il massimo, e il minimo, indi colla metà di questa somma dividere la somma della progressione, e il quoziente darà il cercato numero de' termini.

1033. Corol. 13. Che se saranno dati il minimo termine, e il numero de' termini, che moltiplicato in un dato numero produca la somma della progressione, si potrà trovare l'esponente, mentre il dato numero non può esser altro (pel num. 1023.), che la metà della somma del massimo, e del minimo termine; e però se dal doppio del dato numero si leverà il minimo termine, e il residuo si divida pel numero de' termini diminuito di una unità il quoziente sarà l'esponente cercato.

ARTICOLO II.

Dei Medii proporzionali Aritmetici.

1034. CHe cosa siano questi medii proporzionali l'abbiamo veduto al num. 1003.

1035. Prob. 1. Tra due dati numeri si debba ritrovare un medio proporzionale aritmetico.

1036. Risol. Si sommino insieme i dati due numeri, e la metà di questa somma darà il ricercato medio proporzionale. Come essendo 2, 6 i dati numeri, il medio sarà 4.

1037. La Dim. costa dal num. 408.

1038. Prob. 2. Tra due quantità date, delle quali la prima sia la minore, si debba ritrovare il primo di due medii proporzionali aritmetici.

1039. La soluzione costa dal numero 411. Per lo che essendo date le due quantità 3, 15, si avrà il primo di due medii proporzionali, che cadono fra loro con fare $\frac{3+3+15}{3} = \frac{21}{3} = 7$ primo medio cercato.

1040. Che se fosse stato proposto di ritrovare tra le due date quantità 3, 15 il secondo di due medii proporzionali, si sarebbe primieramente trovato il primo pel preced. num. 1039., a cui aggiungendosi la differenza, che passa tra lui, e la prima quantità data, ne sarebbe risultato il secondo, che nel caso presente è $7 + 4 = 11$.

1041. Prob. 3. Tra due date quantità, delle quali la minore occupi il primo posto, si debba ritrovare il primo di tre medii proporzionali aritmetici.

1042. Risol. Si regoli giusta il num. 411. Ritrovato poi il primo si avrà ancora l'esponente comune, mediante cui (pel num. 1010.) si potranno ritrovare gli altri.

1043. Dai tre precedenti numeri 1035, 1038, 1041 abbastanza si scorge il metodo da tenersi per trovare tra due quantità date il primo di quanti si vogliono medii proporzionali aritmetici, quale trovato si avranno ancora (giusta il num. 1042.) gli altri.

ARTICOLO III.

Delle Progressioni Geometriche.

1044. DEf. 1. La progressione geometrica è una serie di quantità in continua proporzione geometrica (giusta il num. 453.). Quel numero poi, che indica quante volte un termine contiene, o è contenuto nel susseguente prossimo termine, chiamasi denominatore della progressione. Se il denominatore è 2, la progressione dicesi dupla; se il denominatore è 3, la progressione si dice tripla; se è 4 ec. Ecco gli Esempii.

1.	2.	4.	8.	16.	32.
3.	9.	27.	81.	243.	729. ec.
4.	16.	64.	256.	1024.	4096.

1045. Questa semplice definizione è la sorgente di moltissimi corollarii, che anderò qui in buona parte soggiungendo.

1046. Corol. 1. Se pertanto si moltiplicherà pel denominatore qualsivoglia dato termine, ne risulterà il termine susseguente; e se questo si moltiplicherà nello stesso denominatore, si avrà l'altro susseguente ec. Per lo che essendo dato il denominatore, e il primo termine di una progressione geometrica, si potrà ella continuare a piacere: E questa dicesi progressione crescente o ascendente, perchè procede con termini sempre crescenti. Per Esempio 2, 2X3, 6X3, 18X3, 54X3, 162X3 ec.

1047. Corol. 2. Quindi la progressione geometrica a differenza dell'aritmetica, non può cominciare dal zero, mentre in tal caso tutti i di lei termini sarebbero zero: Che se il denominatore della progressione sara l'unità, tutti i termini saranno eguali.

1048. Corol 3. E però se la progressione geometrica principierà dall'unità, il secondo termine sarà eguale all'esponente, e conseguentemente tutti gli altri termini susseguenti della progressione risulteranno dalla ripetuta moltiplicazione del secondo termine in se stesso, o sia non altro saranno, che le successive potenze del secondo termine.

1049. Corol. 4. Che se principiando la progressione dall'unità, il secondo termine sarà un quadrato, tutti gli altri saranno quadrati; se sarà un cubo, tutti gli altri saranno cubi; se sarà un quadrato-quadrato, tutti gli altri saranno quadrato-quadrati ec.

1050. Corol. 5. Rendesi ancora manifesto, che se di due termini prossimi di una progressione si dividerà il maggiore per il minore, il quoziente sarà il denominatore.

1051. Corol. 6. Il denominatore poi avrà la ſteſſa ragione all'unità, che ha il maggiore di due termini proſſimi al minore.

1052. Corol. 7. Qualora ſia dato il denominatore, il primo termine della progreſſione, e il numero de' termini, ſi avrà il termine indicato da tale numero con moltiplicare il primo termine nella poteſtà del denominatore determinata dal numero del termine propoſto diminuito di una unità.

1053. Corol. 8. *Vice verſa* poi eſſendo dato il maſſimo, il minimo termine, e il numero de' termini, ſi avrà il denominatore della progreſſione con dividere il maſſimo termine per il minimo, indi del quoziente prenderne la radice indicata dal numero de' termini diminuito di una unità, e tale radice ſarà il denominatore cercato.

1054. Corol. 9. Poichè la progreſſione geometrica è una ſerie di quantità in continua proporzione geometrica, ciaſcun termine della progreſſione fuori dell'ultimo ſarà antecedente, e ciaſcun termine fuori del primo ſarà conſeguente; e però, data la ſomma, il maſſimo, e il minimo termine della progreſſione, ſe dalla ſomma data ſi ſottrerà il minimo termine, il reſiduo ſarà la ſomma di tutti i conſeguenti; o pure ſe dalla ſomma data ſi ſottrerà il maſſimo termine, il reſiduo ſarà la ſomma degli antecedenti. Prendo l'Eſempio dalla progreſſione 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, la di cui ſomma è 127, onde ſarà $127 - 1 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$; e $127 - 64 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$. E la ſomma degli antecedenti ſtarà alla ſomma de' conſeguenti, come qualunque antecedente al ſuo conſeguente (per num. 549.)

1055. Corol. 10. Qualunque termine poi avrà egual ragione all'incremento del ſuo termine proſſimo ſuſſeguente; e però i continui incrementi di ciaſcun termine ſaranno ai loro termini proporzionali.

1056. Corol. 11. Di tre dati termini ſuſſeguenti in progreſſione geometrica, il prodotto degli eſtremi è eguale al quadrato del termine di mezzo; parimenti di quattro termini ſuſſeguenti in progreſſione geometrica, il prodotto degli eſtremi è eguale al prodotto de' medii: E perchè nella progreſſione geometrica due termini egualmente diſtanti da un qualſivoglia termine, o da due altri termini, ſono proporzionali allo ſteſſo, o agli ſteſſi due termini, perchè l'eſponente della loro ragione riſulta dal prodotto del denominatore della progreſſione moltiplicato nel numero della loro vicendevol diſtanza, o ſia nel numero de' termini intermedj accreſciuto di una unità però il quadrato di un qualunque termine della progreſſione geometrica è eguale al prodotto di due altri termini da eſſo egualmente diſtanti; o pure il prodotto di due termini in progreſſione geometrica è eguale al prodotto di altri due termini da loro egualmente diſtanti. Onde per Eſempio nella precedente progreſſione 1, 2, 4 ec. ſarà $8 \times 8 = 2 \times 32$; e $1 \times 64 = 4 \times 16$.

1057. Corol. 12. *Vice verſa* poi ſe il prodotto di due termini ſarà eguale al prodotto di altri due, queſti quattro termini ſaranno proporzionali, e ognuno de' due primi ſarà egualmente diſtante da ognuno de' due ſecondi.

1058. Corol. 13. Conſeguentemente ſe in qualſivoglia progreſſione geometrica ſi prenderanno quanti termini più piacciono, ognuno de' quali ſia dall'altro egualmente diſtante, queſti termini ſaranno pure in progreſſione geometrica: Così della progreſſione 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. 2048. 4096. 8192. 16384. 32768. i termini per Eſempio 1. 8. 64. 512. 4096. 32768. ſono in progreſſione geometrica, e *vice verſa*.

1059. Corol. 14. E perchè il prodotto di due termini della progreſſione geometrica è eguale al prodotto di altri due da loro egualmente diſtanti, ſe il numero

-ro de' termini della progressione sarà pari, con moltiplicare la metà del numero de' termini nel prodotto di due termini egualmente distanti dagli estremi, si avrà la somma di tutti i prodotti, che nascono dal moltiplicarsi a due a due i termini egualmente dagli estremi distanti. Se poi il numero de' termini sarà impari, il termine, che occupa il luogo di mezzo nella progressione, si dovrà considerare a parte.

Corol. 15. Per lo che se sarà dato un numero pari di termini, il minimo termine, e la somma dei prodotti degli ambi de' termini egualmente distanti dagli estremi, si avrà il massimo termine con dividere la somma dei prodotti pel numero esprimente la metà de' termini, mentre il quoziente sarà il prodotto d'uno degli ambi; e però se questo quoziente si dividerà pel minimo termine, il nuovo quoziente darà il massimo. Che se in vece del minimo fosse dato il massimo, si sarebbe avuto il minimo con dividere l' anzidetto quoziente pel massimo termine, ed il nuovo quoziente sarebbe il minimo termine.

Corol. 16. Qualora poi sia dato il prodotto di due termini egualmente distanti dagli estremi, e la somma di tutti i prodotti de' termini egualmente distanti, si avrà il numero de' termini con dividere la somma de' prodotti pel dato prodotto di due termini, mentre il doppio di questo quoziente darà il ricercato numero de' termini.

1060. Corol. 17. Parimente dall' essere i termini della progressione geometrica quantità in continua proporzione geometrica s' intende, che in qualsivoglia progressione la ragione, che passa fra due termini, tra' quali si interpone un sol termine, è eguale alla ragione de' quadrati di due termini immediatamente seguentisi. Se poi fra i due dati termini si interporranno due termini, la ragione, che passa fra i due termini dati sarà eguale alla ragione de' cubi di due termini immediatamente seguentisi. Che se fra i due dati termini si interporranno tre termini, la loro ragione sarà eguale alla ragione dei quadrato-quadrati di due termini immediatamente seguentisi ec.

1061. Corol. 18. Se nella progressione geometrica si prenderanno tre termini consecutivi, de' quali il primo sia eguale al denominatore, il loro prodotto sarà eguale al quadrato del terzo termine, poichè col moltiplicarsi il primo nel secondo, ne risulta (pel num. 1045.) il terzo, e però moltiplicandosi questo prodotto nel terzo, ne risulterà il di lui quadrato. Per Esempio nella progressione seconda del num. 1044 sarà $3 \times 9 \times 27 = 27 \times 27$.

1062. Corol. 19. E perchè il prodotto del primo nel terzo è eguale al quadrato del secondo, sarà il quadrato del terzo termine eguale al cubo del secondo, cioè $9 \times 9 \times 9 = 27 \times 27$.

1063. Corol. 20. Che se appresso ai tre detti termini 3, 9, 27, si prenderà il quarto 81, perchè il prodotto del secondo nel quarto è eguale al quadrato del terzo, o sia al cubo del secondo (pel num. 1062.), e il secondo termine è eguale al quadrato del primo (pel num. 1046.) perchè il denominatore, e il primo termine sono eguali, sarà il prodotto, che nasce dal moltiplicarsi il quadrato del primo termine nel quarto, eguale al cubo del secondo, o sia al quadrato del terzo.

1064. Corol. 21. Conseguentemente s' intende, che se i termini saranno cinque, il prodotto, che nasce dal moltiplicarsi il cubo del primo nel quinto, sarà eguale al quadrato-quadrato del secondo: Onde si scorge con qual legge si proceda se i termini sono di più.

A a 2 1065.

1065. Corol. 22. In qualunque progreſſione geometrica ſtando (pel num. 1054.) la ſomma degli antecedenti alla ſomma de' conſeguenti, come qualunque antecedente al ſuo conſeguente, ſarà (pel num. 524.) la ſomma de' conſeguenti meno la ſomma degli antecedenti alla ſomma degli antecedenti come qualunque conſeguente meno il ſuo antecedente allo ſteſſo antecedente: Ma la ſomma de' conſeguenti meno la ſomma degli antecedenti è eguale al maſſimo meno il minimo termine, e la ſomma degli antecedenti è la ſomma di tutti i termini, che precedono il maſſimo; dunque in qualunque progreſſione geometrica qualſivoglia conſeguente meno il ſuo antecedente ſtarà allo ſteſſo antecedente, come la differenza del maſſimo termine ſopra il minimo ſta alla ſomma di tutti i termini, che precedono il maſſimo: E però dato il primo, il ſecondo termine, e il maſſimo; o pure dato il minimo, il maſſimo con due altri termini conſecutivi, ſi troverà la ſomma di tutti i termini, che precedono il maſſimo; che ſe a queſta ſomma ſi aggiungerà lo ſteſſo maſſimo termine, ſi avrà la ſomma di tutta la progreſſione.

E S E M P I O.

Abbiamo dal capo 46 della Geneſi, che Giacobbe entrò in Egitto con 70 perſone, cercaſi a che numero ſarà montata la ſua popolazione in capo a 100 anni, ſuppoſto, che avuto riguardo al piccol numero de' morti, ogni 10 anni ſi ſia aumentata del doppio.

Riſoluzione. Poichè è dato il 70 per primo termine della progreſſione, il denominatore 2, e il numero de' termini 10 ſi trovi (pel num. 1052.) primieramente il maſſimo termine con moltiplicare il 70 per la nona poteſtà di 2, che è 512, onde ſi ha 35840 maſſimo termine cercato, che dà il numero delle perſone, con cui aumentata ſi ſarebbe nel decimo anno la popolazione di Giacobbe: Ora per avere la ſomma cercata ſi trovi (pel num. 1046.) il ſecondo termine della progreſſione, che è 140, per lo che la ſomma ſarà $70 \times \frac{35840 - 70}{140 - 70} + 35840 = 35770 + 35840 = 71610$; poichè è $140 - 70 : 70 :: 35840 - 70$: al quarto, che (pel num. 494) trovaſi eſſere 35770.

1066. Corol. 23. Quindi (pel num. 1051.) ſtando il denominatore all' unità, come il maggiore di due termini proſſimi al minore, ſtarà pure il denominatore diminuito di una unità all' unità, come la differenza del maſſimo termine ſopra il minimo alla ſomma di tutti i termini, che precedono il maſſimo; e però ſe ſi dividerà la differenza del maſſimo termine ſopra il minimo pel denominatore diminuito di una unità, e al quoziente ſi aggiunga il maſſimo termine, ſi avrà la ſomma di tutta la progreſſione.

1067. Corol. 24. O ſia, perchè con moltiplicarſi il maſſimo termine pel denominatore ne viene il termine proſſimo maggiore, eſſendo dato il maſſimo termine, il minimo, e il denominatore, ſe ſi moltiplicherà il maſſimo termine nel denominatore, e il prodotto diminuito del minimo termine ſi divida pel denominatore diminuito di una unità, il quoziente darà la ſomma di tutta la progreſſione.

1068. Corol. 25. Per lo che in qualſivoglia progreſſione geometrica la ſomma di tutti i termini, che precedono il maſſimo, moltiplicata nel denominatore diminuito di una unità dà un prodotto eguale al maſſimo termine diminuito del mi-

minimo: Conseguentemente essendo dato il massimo, il minimo termine, e la somma di tutti i termini, che precedono il massimo, se si dividerà la differenza, che passa tra il massimo, e il minimo termine per la somma di tutti i termini, che precedono il massimo, il quoziente sarà il denominatore diminuito di una unità.

1069. Corol. 26. O pure dato il denominatore, il massimo termine, e la somma, si avrà il minimo termine con levare il massimo termine dalla somma, indi moltiplicare il residuo nel denominatore diminuito di una unità, e questo prodotto, che è la differenza, tra il massimo, e il minimo termine, levarlo dal massimo termine, con che si avrà di residuo il minimo termine.

1070. Corol. 27. Che se sarà dato il massimo termine, e la somma della progressione, si avrà il denominatore, e il minimo termine con levare primieramente dalla somma il massimo termine, indi col residuo (che è eguale alla somma di tutti i termini, che precedono il massimo, quale moltiplicata nel denominatore diminuito di una unità dà la differenza del massimo sopra il minimo) dividere lo stesso massimo termine, con che si avrà un quoziente, che accresciuto di una unità darà il denominatore, e un residuo, che sarà il minimo termine.

1071. Corol. 28. Poichè (pel num. 1066.) il denominatore diminuito di una unità sta all' unità, come la differenza del massimo termine sopra il minimo alla somma di tutti i termini, che precedono il massimo, nella progressione dupla la differenza del massimo termine sopra il minimo sarà eguale alla somma di tutti i termini, che precedono il massimo: Nella progressione tripla tale differenza sarà il doppio della somma di tutti i termini, che precedono il massimo: Nella progressione quadrupla sarà il triplo ec.

1072. Corol. 29. E però nella progressione dupla si avrà la somma di tutta la progressione con levare il minimo termine dal doppio del massimo: della progressione tripla la somma sarà eguale al massimo termine, più la metà della differenza tra esso, e il minimo termine: della progressione quadrupla la somma è eguale al massimo termine, più il terzo della differenza tra esso, e il minimo termine ec.

1073. Corol. 30. E perchè la differenza tra il massimo termine, e la somma è eguale alla somma degli antecedenti, e la differenza tra il minimo termine, e la somma è eguale alla somma de' conseguenti, starà l' unità al denominatore, come la differenza tra il massimo termine, e la somma alla differenza tra il minimo termine, e la somma.

1074. Corol 31. Quindi essendo dati il massimo termine, il minimo, e la somma, si avrà il denominatore con dividere la differenza tra il minimo termine, e la somma per la differenza tra il massimo termine, e la somma.

1075. Corol. 32. Così pure (giusta il num. 1051.) stando il denominatore all' unità, come il maggiore di due termini prossimi al minore, o come la somma de' conseguenti alla somma degli antecedenti, starà pure il denominatore diminuito di una unità a se stesso, come la somma de' conseguenti meno la somma degli antecedenti alla somma de' conseguenti: Ma la somma de' conseguenti meno la somma degli antecedenti è eguale alla differenza del massimo sopra il minimo, e la somma de' conseguenti è eguale alla somma di tutti i termini diminuita del minimo; però come sta il denominatore diminuito di una unità a se stesso, così starà il massimo diminuito del minimo alla somma di tutti i termini diminuita del minimo termine.

1076.

1076. Corol. 33. E per la stessa ragione essendo dati due termini seguentisi, il minimo, e il massimo termine, starà il maggiore de' dati termini seguentisi diminuito del minore allo stesso maggiore, come la differenza del massimo sopra il minimo sta alla somma di tutti i termini diminuita del minimo.

1077. Corol. 34. Per lo che essendo dato il denominatore, e la somma di tutti i termini diminuita del minimo, si avrà il massimo termine diminuito del minimo con moltiplicare la somma data pel denominatore diminuito di una unità, e poscia dividere il prodotto per lo stesso denominatore.

1078. Def. 2. La progressione dicesi finita quando il numero de' termini è finito, che se i termini procederanno in infinito, la progressione si dirà infinita, o indefinita.

1079. Teor. Se si moltiplicheranno insieme ordinatamente i corrispondenti termini di due, o più progressioni geometriche, i prodotti formeranno una nuova progressione geometrica, il di cui denominatore sarà il prodotto de' denominatori delle progressioni insieme moltiplicate.

1080. La Dim. costa dal num. 534

ESEMPIO.

Progressioni. {	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.
	3.	6.	12.	24.	48.	96.	192.
Prodotti.	3.	12.	48.	192.	768.	3072.	12288.

ALTRO ESEMPIO.

Progressioni. {	1.	2.	4.	8.	16.
	3.	9.	27.	81.	243.
	2.	8.	32.	128.	512.
Prodotti.	6.	144.	3456.	82944.	1990656.

1081. Si osservi di passaggio, che se fra i termini di una qualunque data progressione geometrica si prenderanno le differenze, indi si prendano le differenze delle differenze, e così in infinito, mai si potrà giungere a differenze costanti, come nelle progressioni aritmetiche, ma queste differenze, e differenze delle differenze ec. saranno sempre in progressione geometrica, della quale il denominatore sarà lo stesso denominatore della progressione proposta.

1082. Prob. 1. Essendo dato il denominatore, il minimo termine, e la somma della progressione, si debba trovare il massimo termine.

1083. Risol. Si moltiplichi la somma data nel denominatore diminuito di una unità, e il prodotto accresciuto del minimo termine si divida pel denominatore, mentre il quoziente sarà il massimo termine cercato.

1084. La Dim. si raccoglie dal num. 1066, poichè essendo la somma della progressione eguale al massimo termine più il quoziente, che nasce dal dividersi la differenza del massimo sopra il minimo pel denominatore diminuito di una unità, sarà il prodotto della somma nel denominatore diminuito di una unità eguale alla dif-

differenza del massimo sopra il minimo più il prodotto del denominatore nel massimo termine meno lo stesso massimo termine, e aggiungendosi all' una, e all' altra parte il minimo termine, sarà il minimo termine più il prodotto della somma nel denominatore diminuito di una unità eguale al minimo termine più la differenza tra il massimo, e il minimo, vale a dire al massimo termine (perchè il minimo termine più la differenza tra il massimo, e il minimo è lo stesso massimo termine) meno il massimo termine più il prodotto del denominatore nel massimo termine; ma dal massimo termine levandosi il massimo termine resta zero; dunque sarà il minimo termine più il prodotto della somma nel denominatore diminuito di una unità eguale al prodotto del denominatore nel massimo termine, e conseguentemente sarà il massimo termine eguale al minimo termine, più il quoziente, che nasce dal dividersi pel denominatore il prodotto della somma nel denominatore diminuito di una unità. Lo che ec.

Per esempio essendo dato il numero 71610, a cui (giusta il num. 1065.) è montata in 100 anni la popolazione delle 70 persone entrate in Egitto, dato il minimo termine 70 della progressione, e dato il denominatore 2, stante che s' accrescevano del doppio ogni 10 anni cercasi l' aumento, che si è fatto negli ultimi dieci anni. Si faccia pertanto $\frac{70 + 71610 \times \overline{2 - 1}}{2} = 35840$, che è il massimo termine cercato, e però negli ultimi dieci anni si sono accresciute 35840 persone.

1085. Prob. 2. Essendo dato il minimo termine, il massimo, e il denominatore, si debba ritrovare il numero de' termini.

1086. Risol. Si divida il massimo termine per il minimo, indi si osservi a quale potestà del dato denominatore sia eguale il ritrovato quoziente, mentre di tale potestà l' esponente accresciuto di una unità darà il ricercato numero de' termini.

1087. La Dim. costa dal num. 1052.

1088. Corol. 1. E però essendo dati il massimo termine, il denominatore, e la somma della progressione, si troverà il numero de' termini con ritrovare primieramente il minimo termine (giusta il num. 1069.), indi trovare il massimo (pel num. 1086.)

1089. Corol. 2. Che se saranno dati il minimo termine, il denominatore, e la somma della progressione, si troverà il numero de' termini con trovare primieramente il massimo (pel num. 1084.), indi il numero de' termini (pel num. 1085.)

1090. Prob. 3. Essendo dati il massimo termine, il denominatore, e il numero de' termini, si debba ritrovare la somma della progressione.

1091. Risol. S'innalzi il denominatore ad una potestà, il di cui esponente sia il numero de' termini diminuito di una unità, indi con questa potestà si divida il massimo termine, e il quoziente sarà il minimo termine: Poscia si trovi la somma (pel num. 1066.)

1092. Dim. Pel num. 1052. il massimo termine risulta dal moltiplicarsi il minimo termine in una potestà del denominatore, della quale potestà l' esponente sia il numero de' termini diminuito di una unità; se adunque con questa potestà si dividerà il massimo termine, il quoziente sarà il minimo termine. Lo che si doveva dimostrare.

1093.

1093. Def. 3. Progreſſione geometrica decreſcente o diſcendente è quella, di cui ciaſcun termine naſce dal dividerſi il ſuo termine precedente pel denominatore, e tale è la ſeguente

$$64.\ 32.\ 16.\ 8.\ 4.\ 2.\ 1.\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{32}\ \text{ec.}$$

1094. Corol. 1. Quindi ſi avrà qualſivoglia termine della progreſſion diſcendente con dividere il primo, o maſſimo termine pel denominatore tante volte, quante ne indica il numero del termine cercato diminuito di una unità; o ſia con dividere il primo termine per una poteſtà del denominatore, della quale poteſtà l'eſponente ſia il numero del termine cercato diminuito di una unità: Onde eſſendo dato per Eſempio il denominatore 2, e il primo termine 64, ſe ſi vorrà il nono termine ſi farà $\frac{64}{2^8} = \frac{64}{256} = \frac{1}{4}$ nono termine cercato.

1095. Corol. 2. Per lo che ſe ſarà dato il denominatore di una progreſſione, e il numero del termine cercato diminuito di una unità, o ſia la diſtanza, che paſſa fra il termine cercato, e il maſſimo, ſi farà nota la ragione, che trovaſi fra queſti due termini, poichè eſſa ſarà indicata da una poteſtà del denominatore; il di cui eſponente ſia la diſtanza de' ſuddetti termini; cioè il termine cercato ſtarà al primo, come l'unità a queſta poteſtà.

1096. Corol. 3. E però eſſendo data la ragione fra due termini, e la loro diſtanza, ſi avrà il denominatore della progreſſione con prendere quella radice del termine maggiore della ragione, che viene indicata dalla diſtanza de' termini: Per Eſempio eſſendo $1 : 16$ la ragione, che paſſa fra due termini, e la loro diſtanza eſſendo 4, ſarà $\sqrt[4]{16} = 2$ il denominatore cercato.

1097. Corol. 4. Se poi ſarà dato il denominatore, e la ragione, che paſſa fra due termini, ſi avrà la loro diſtanza con ritrovare a quale poteſtà del denominatore equivaglia il maggior termine della data ragione (ſuppoſto ſempre, che un termine di queſta ragione ſia l'unità): Come eſſendo 2 il denominatore, e 16 il maggior termine della ragione data, biſognerà trovare quale poteſtà del denominatore 2 ſia il 16, e perchè il 16 è la quarta poteſtà di 2, però la diſtanza de' detti due termini è 4.

1098. Circa le progreſſioni diſcendenti ha luogo lo che ſi è detto ai num. 1050, 1054, 1056, 1057, 1058, 1059, 1060, 1065, 1071, 1072, 1076.

1099. Principalmente per trovare la ſomma di qualſivoglia progreſſione geometrica diſcendente ſervirà quanto ſi è detto al num. 1076: Onde eſſendo dato per Eſempio il primo termine 6, il ſecondo 2, e il minimo $\frac{2}{27}$ (ai quali corrriſponde la progreſſione $6.\ 2.\ \frac{2}{3}.\ \frac{2}{9}.\ \frac{2}{27}$) ſi avrà la ſomma di tutti i termini meno il minimo con fare $\frac{6 \times \overline{6 - \frac{2}{27}}}{6 - 2} = \frac{6 \times \frac{160}{27}}{4} = \frac{960}{108} = 8\frac{8}{9}$, a cui aggiungendoſi il minimo termine $\frac{2}{27}$, ſi avrà $8\frac{8}{9} + \frac{2}{27} = 8\frac{26}{27}$, che è la ſomma della propoſta progreſſione.

1100.

1100. Fin'ora abbiamo supposto, che la progressione geometrica discendente sia finita, o sia costi di un numero finito di termini, ma se ella procederà all'infinito, o sia venga composta da un numero infinito di termini, in tal caso una cosa devesi osservare, ed è, che il termine infinitesimo sarà talmente piccolo, che nelle operazioni si potrà trascurare senza pericolo d'errore: Onde coerentemente al num. 1099. si avrà la somma di una progressione geometrica decrescente all'infinito con dividere il quadrato del primo termine per la differenza, che passa tra il primo, e il secondo, poichè (giusta il num. 1076.) stando la differenza tra il primo termine della progressione, e il secondo, al primo termine, come lo stesso primo termine diminuito del minimo alla somma di tutti i termini diminuita del minimo, e potendosi senza errore trascurare il minimo a motivo della somma sua piccolezza, starà la differenza tra il primo, e il secondo termine al primo termine, come lo stesso primo termine alla somma di tutta la progressione; e però la somma della progressione sarà il quoziente, che nasce dal dividersi il quadrato del primo termine per la differenza, che passa tra il primo, e il secondo. Questo valore poi non è l'esatta rigorosa somma della progressione, perchè quantunque il minimo termine si possa trascurare senza errore sensibile, egli però non è zero, cui soltanto infinitamente si accosta: Per lo che questa espressione della somma di una progressione geometrica decrescente all'infinito è un poco maggiore della somma esatta, essendo un poco maggiore della espressione data al num. 1099, nella quale in luogo del minimo termine $\frac{2}{27}$ si supponga entrare il termine infinitesimo della progressione. Il non potersi poi avere il termine infinitesimo di una progressione decrescente all'infinito a motivo, che non si possono percorrere infiniti termini, fa che si debba contentare di una somma differente dalla vera per un errore per altro insensibile nato dal trascurarsi il minimo infinitesimo termine.

1101. Si vede pertanto, che per avere la somma di una progressione discendente all'infinito, basta che ne sia dato il primo, e il secondo termine.

ESEMPIO.

1102. Per venire all'Esempio prenderemo ad esaminare l'argomento di Zenone Capo degli Stoici, con cui pretendeva, che posta una Tartaruga in distanza di una Lega da Achille, e supposto che Achille corresse dieci volte più veloce della Tartaruga, messi l'uno, e l'altra in moto mai potrebbe Achille raggiungere la Tartaruga, poichè mentre Achille fa la prima Lega, la Tartaruga ne fa un decimo della seconda, e mentre Achille fa un decimo della seconda la Tartaruga fa un decimo di questo decimo, e così in infinito senza mai raggiungere la Tartaruga: Ora siccome tutti questi decimi formano la seguente progressione $1, \frac{1}{10}. \frac{1}{100}. \frac{1}{1000}. \frac{1}{10000}. \frac{1}{100000}$ ec., così per convincersi della falsità dell'argomento basta sommare questa progressione, mentre la di lei somma darà lo spazio, che deve percorrere Achille per raggiungere la Tartaruga. Si divida pertanto il quadrato 1 del primo termine per $1 - \frac{1}{10}$ differenza tra il primo, e il secondo, e si avrà $\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} =$

$\frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$. E però Achille raggiungerà la Tartaruga dopo aver fatto una Lega, e la nona parte della feconda Lega.

1103. Dal num. 1066. s'intende, che nelle progreffioni geometriche decrefcenti all' infinito come il denominatore diminuito di una unità fta all'unità, così il primo termine della progreffione fta alla fomma di tutti i termini infiniti, che gli vengono dopo.

1104. Corol. 1. Quindi fe il denominatore della progreffione farà 2, il primo termine farà eguale alla fomma di tutti gli altri termini infiniti, che vengono dopo di lui, e però il doppio del primo termine darà la fomma della progreffione. Eccone l'Efempio.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{128} \text{ ec., di cui la fomma è} = 1 \text{ doppio del primo termine.}$$

Se il denominatore farà 3, il primo termine farà il doppio della fomma di tutti gli altri, che lo feguono, e però il primo termine più la fua metà darà la fomma di tutta la progreffione. Eccone l'Efempio.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{1}{243} \text{ ec., la di cui fomma è} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Se il denominatore farà 4, il primo termine farà il triplo della fomma di tutti gli altri fuffeguenti, e però il primo termine più la fua terza parte darà la fomma di tutta la progreffione. Ecco l'Efempio.

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{256} \cdot \frac{1}{1024} \text{ ec., la di cui fomma è} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

Se il denominatore farà 5, il primo termine farà il quadruplo della fomma di tutti gli altri, che gli vengono dopo ec.

1105. Corol. 2. Si vede pertanto, che la fomma di una progreffione geometrica decrefcente all' infinito non è fempre una quantità finita, ma può effere minore di qualunque finita quantità affignabile.

1106. Corol. 3. Effendo pertanto dato il denominatore, e la fomma della progreffione diminuita del primo termine, fi avrà lo fteffo primo termine con moltiplicare la data fomma nel denominatore diminuito di una unità.

1107. Corol. 4. Che fe farà dato il primo termine, e la fomma della progreffione diminuita dello fteffo primo termine, fi avrà il denominatore diminuito di una unità con dividere il primo termine per la detta fomma.

ARTICOLO IV.

De' medii proporzionali geometrici.

1108. DEf. Medio proporzionale geometrico è una quantità, che cade in proporzion geometrica tra due dati termini della progreffione geometrica.

1109.

1109. Corol. 1. Poichè (pel num. 1056.) di tre termini in proporzione il prodotto degli estremi è eguale al quadrato del termine di mezzo, se il prodotto dei due dati termini della progressione non sarà un quadrato, fra loro non si potrà trovare un medio proporzionale.

1110. Fra due numeri però, fra'quali non si può trovare un medio proporzionale, se ne potranno trovare due, o più.

1111. Corol. 2. Quindi se tra due dati termini si dovrà trovare un medio proporzionale, basterà moltiplicare insieme i due dati termini, e dal loro prodotto estrarne la radice quadrata, quale sarà il ricercato medio proporzionale.

1112. Prob. Fra due dati termini si debbano ritrovare quanti medii proporzionali si vogliono.

1113. Risol. Si divida il maggiore de'dati termini per il minore, e il quoziente paragonato all'unità darà la ragione, che ha il maggiore de'dati termini al minore; se pertanto da questo quoziente si estrarrà la radice indicata dal numero de' medii proporzionali cercati, qual numero sia accresciuto di una unità, tale radice sarà il denominatore, col quale si troveranno i cercati medii proporzionali (giusta il num. 1046.)

1114. La Dim. costa dal num. 1096. E perchè la distanza de' proposti termini è eguale al numero de' cercati medii proporzionali accresciuto di una unità, quindi è, che la radice da estrarsi deve essere denominata dal numero de' medii proporzionali accresciuto di una unità. Per Esempio fra 3, e 2187 si debbano trovare cinque medii proporzionali: Divido il 2187 per 3, e mi viene 729, da cui debbo estrarre la radice indicata da 5 + 1, cioè la sesta radice, quale trovasi essere 3, che sarà il denominatore. Quindi col primo termine 3, e con questo denominatore 3 trovo (pel num. 1046.) i cercati medii proporzionali, e mi viene 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

CAPO VI.

De' Logaritmi, e loro Calcolo.

ARTICOLO I.

Dell' origine, e natura de' Logaritmi.

1115. PEr procedere colla maggiore chiarezza possibile comincierò dalle nozioni più semplici.

1116. Def. 1. Esponenti una progressione geometrica sono i numeri della serie naturale principiante dal zero, i quali indicano il posto di ciascun termine nella stessa progressione, fra i termini della progressione non intendendovisi però compreso il primo termine, cioè l'unità, a cui per esponente si dà il zero. Eccone l' Esempio.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	ec.
1.	5.	25.	125.	625.	3125.	15625.	78125.	

1117. Poichè la progressione geometrica, che abbiamo preso a considerare, comincia dall' unità, i di lei termini risulteranno dalle successive potenze del secondo termine, le quali verranno indicate dall' esponente a ciascun termine soprascritto; vale a dire ciascun esponente indicherà, che potestà sia del secondo termine quel termine, a cui egli corrisponde.

1118. Corol. 1. Per lo che qualunque termine maggiore della progressione si potrà dividere per qualunque termine minore; o sia qualunque termine maggiore sarà perfettamente misurato da un termine minore della stessa progressione.

1119. Corol. 2. Se pertanto il secondo termine della progressione sarà un numero primo, qualsivoglia termine maggiore potrà essere solamente misurato dal secondo termine, o da qualche altro della progressione.

1120. Corol. 3. Che se il secondo termine della progressione sarà un numero composto, il quale sia misurato da qualche numero primo, tale numero primo, che misura il secondo termine, misurerà ancora qualunque altro termine della progressione.

1121. Corol. 4. Poichè i suddetti Esponenti indicano il luogo, che occupa ciascun termine dopo l' unità, o sia ne indicano la distanza; quindi è, che soglionsi chiamare indicii della distanza, che ha ciascun termine dall' unità. Onde dato essendo il numero de' termini di una progressione geometrica principiante dall' unità, se si voglia l'esponente del massimo termine, egli sarà il numero de' termini diminuito di una unità.

1122. Corol. 5. Essendo che questi esponenti, che corrispondono ai termini della progressione geometrica, sono termini in progressione aritmetica, se nella progressione geometrica si prenderanno quattro termini geometricamente proporzionali, i loro corrispondenti esponenti saranno in proporzione aritmetica, e però siccome (pel num. 1056.) rispetto ai quattro termini della progressione geometrica il prodotto degli estremi è eguale al prodotto de' medj, così rispetto ai loro esponenti (pel num. 1020.) la somma degli estremi è eguale alla somma de' medj: O pure nella progressione geometrica presi tre termini continui proporzionali, siccome (pel num. 1056.) il prodotto degli estremi è eguale al quadrato del termine di mezzo, così rispetto ai loro esponenti la somma degli estremi è eguale al doppio del termine di mezzo (pel num. 1020.)

1123. Corol. 6. Quindi nella progressione geometrica se di quattro termini geometricamente proporzionali ne saranno dati tre, de' quali il primo sia l' unità, e se ne cerchi il quarto, egli si avrà facilmente con prendere nella stessa progressione quel termine, che ha per esponente la somma degli esponenti degli altri due termini diminuita dell' esponente dell' unità; ma perchè si è dato all' unità per esponente il zero, però ommesso il calcolo di questo esponente (lo che faremo ancora nelle seguenti operazioni, mentre coll' aggiungersi, o sottrarsi il zero ritorna sempre la stessa quantità), si avrà il quarto termine cercato con prendere nella progressione quel termine, che ha per esponente la somma degli esponenti del secondo, e terzo termine: che se si cercasse il secondo termine, basterebbe prendere nella progressione quel termine, che ha per esponente la differenza, che nasce dal sottrarsi dall' esponente del quarto termine l'esponente del terzo. Se si cercasse il terzo basterebbe prendere nella progressione geometrica quel termine che ha per esponente la differenza, che nasce dal sottrarsi dall' esponente del quarto termine l' esponente del secondo: Istessamente se saranno dati due termini della progressione, e fra loro si voglia trovare un medio proporzionale, basterà prendere nella

stessa

ſteſſa progreſſione quel termine, che ha per eſponente la metà della ſomma degli eſponenti dei dati due termini ec.

1124. Corol. 7. E però ſiccome in qualunque moltiplicazione (pel num. 495.) l' unità ſta al moltiplicante, come il moltiplicando al prodotto, quindi ſe ſaranno dati due termini della progreſſione da moltiplicarſi inſieme, ſi avrà il loro prodotto con prendere nella ſteſſa progreſſione quel termine, che ha per eſponente la ſomma degli eſponenti de' due dati termini, cioè del moltiplicatore, e del moltiplicando.

1125. Corol. E ſiccome l' innalzare una data quantità al quadrato non è altro, che moltiplicarla in ſe ſteſſa, ſe ſi dovrà elevare al quadrato un termine della progreſſione, ſi avrà tale quadrato con prendere nella ſteſſa progreſſione quel termine, che ha per eſponente il doppio dell'eſponente del termine propoſto. Iſteſſamente perchè per innalzare una data quantità al cubo biſogna moltiplicarla due volte in ſe ſteſſa; per innalzarla al quadrato-quadrato biſogna moltiplicarla tre volte in ſe ſteſſa ec., ſe ſi dovrà elevare al cubo un termine della progreſſione geometrica, baſterà prendere nella ſteſſa progreſſione quel termine, che ha per eſponente il triplo dell'eſponente del termine dato; ſe ſi dovrà elevare al quadrato-quadrato, baſterà prendere nella progreſſione quel termine, che ha per eſponente il quadruplo dell' eſponente del termine dato ec.

1126. Corol. 9. *Vice verſa* poi ſiccome l' eſtrarre la radice quadrata da una propoſta quantità non è altro, che ritrovare un medio proporzionale tra l' unità, e detta quantità; per eſtrarci la radice cuba biſogna tra l' unità, e tale quantità prendere il primo di due medj proporzionali; e il primo di tre medj proporzionali per eſtrarci la radice quadraro-quadrara ec., però ſe da un termine della progreſſione geomerrica ſi dovrà eſtrarre la radice quadrara, baſterà prendere nella ſteſſa progreſſione quel termine a cui corriſponde per eſponente la metà dell' eſponente del termine dato; ſe vi ſi dovrà levare la radice cuba, baſterà prendere nella progreſſione quel termine, che ha per eſponente la terza parte dell' eſponente del termine propoſto ec.

1127. Corol. 10. Parimente in qualſivoglia diviſione ſtando (pel num. 495.) l' unità al quoziente, come il diviſore al dividendo, ſe un termine della progreſſione ſi dovrà dividere per un' altro pure della progreſſione, baſterà prendere nella ſteſſa progreſſione quel termine, che ha per eſponente la differenza, che naſce dal levarſi dall' eſponente del dividendo l' eſponente del diviſore.

Ecco gli Eſempj delle regole date preſi dalla progreſſione del num. 1116.

1128. Si debba moltiplicare 125 per 625, perchè i loro eſponenti ſono 3, 4 prendo la loro ſomma, che è 7, e cerco qual termine nella ſteſſa progreſſione abbia il 7 per eſponente, e trovo, che egli è 78125, dunque 78125 è il prodotto de' due dati termini 125, 625.

Si debba dividere 15625 per 625, de' quali gli eſponenti ſono 6, 4, dal 6 ſottro il 4, e mi viene di reſiduo 2, cerco pertanto qual termine nella progreſſione abbia il 2 per eſponente, e trovo, che egli è 25, dunque 25 è il quoziente, che naſce dal dividerſi 15625 per 625.

Debbaſi innalzare alla quinta poteſtà il 5, di cui l' eſponente è 1, prendo il quintuplo di queſto eſponenre, che è 5, e cerco nella progreſſione quel termine, che ha 5 per eſponente, e trovo, che egli è 3125, dunque 3125 è la quinta poteſtà di cinque.

Si

Si debba estrarre la radice cuba da 15625, il di cui esponente è 6, prendo la terza parte di questo esponente, che è 2, e cerco nella progressione quel termine, che ha il 2 per esponente, e trovo, che egli è 25, dunque 25 è la radice cuba di 15625.

1129. Nelle surriferite operazioni abbiamo supposto il zero per esponente dell' unità, che se egli fosse un qualche numero, si avrebbe dovuto avere ad esso riguardo nelle accennate operazioni: E però si avrebbe l'esponente, che compete al prodotto di due termini della progressione geometrica con sottrarre dalla somma de' loro esponenti l'esponente dell' unità. Così si avrebbe l' esponente, che compete al quoziente nato dal dividersi un termine della progressione per un' altro con levare l' esponente del divisore dalla somma degli esponenti dell' unità, e del dividendo. Si avrebbe l' esponente, che compete al quadrato, al cubo, al quadrato-quadrato ec. di un dato termine della progressione con prendere il residuo, che nasce dal sottrarsi l'esponente dell'unità dal doppio, dal triplo, dal quadruplo ec. dell' esponente del proposto termine. Finalmente si avrebbe l'esponente della radice quadrata, cuba ec. di un termine della progressione con prendere la metà, il terzo, il quarto ec. della somma degli esponenti dell' unità, e del termine dato.

1130. Ora le operazioni rispetto all'esponente dell' unità si risparmiano ogniqualvolta egli è zero, e questo è il motivo, per cui è stato prescielto il zero per esponente dell'unità.

1131. Veniamo adesso ai logaritmi, i quali non sono altro, che quei termini, che abbiamo chiamati esponenti della progressione geometrica, e però.

1132. Def. 2. I logaritmi non sono altro, che quantità in progressione aritmetica, alle quali corrispondono, o sia le quali corrispondono ad altre quantità in progressione geometrica.

1133. La progressione aritmetica, la quale è la sede de' logaritmi, può essere qualunque, cioè può procedere con qualsisia differenza, è può avere qualunque quantità per primo termine, poichè la progressione geometrica corrispondente, la quale pure si può prendere a piacere, non si arroga piuttosto questa, che quella progressione aritmetica, o serie di Logaritmi, nè piuttosto ascendente, che discendente. Ben è vero però, che ogniqualvolta si sia fissata una progressione aritmetica per la sede de' logaritmi, non è più lecito il variarla.

1134. Nella seguente Tavola si vede un' Esempio, in cui ai termini della progressione geometrica 1. 2. 4. 8. 16. 32. ec. si sono assegnati per logaritmi i termini di qualsivoglia delle progressioni aritmetiche distinte colle lettere A, B, C, D, H,

A, B,

	A	B	C	D	H
1	0	3	5	35	0
2	1	7	8	32	$1\frac{1}{3}$
4	2	11	11	29	$2\frac{2}{3}$
8	3	15	14	26	4
16	4	19	17	23	$5\frac{1}{3}$
32	5	23	20	20	$6\frac{2}{3}$
64	6	27	23	17	8
128	7	31	26	14	$9\frac{1}{3}$
256	8	35	29	11	$10\frac{2}{3}$

1135. Si offervi, che la progreffione geometrica ficcome dall' unità procede afcendendo all' infinito, così pure dall' unità procede difcendendo all' infinito, di maniera che l' unità è il centro della progreffione, o vogliam dire l' origine tanto de' termini afcendenti, che de' difcendenti, come nella feguente

$$64.\ 32.\ 16.\ 8.\ 4.\ 2.\ 1.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{8}.\ \frac{1}{16}.\ \frac{1}{32}.\ \frac{1}{64}.$$

Tanto ai termini poi dall' unità afcendenti, come ai termini dall' unità difcendenti hanfi ad affegnare i convenienti logaritmi.

1136. Def. 3. I logaritmi, che corrifpondono ai termini dall' unità afcendenti, fi chiamano pofitivi, e i logaritmi, che corrifpondono ai termini dall' unità difcendenti, fi dicono difettivi, o negativi, perchè procedono in parte contraria ai logaritmi pofitivi.

1137. Corol. Egli è pertanto evidente, che a qualunque logaritmo pofitivo deve corrifpondere nella parte contraria in eguale diftanza dall' unità della progreffione geometrica un logaritmo negativo.

1138. Quantunque ai termini dell' affunta progreffione geometrica fi poffano dare per logaritmi i termini di una, qual più è in grado progreffione aritmetica, è però piacciuto ai matematici il fervirfi della progreffione aritmetica naturale principiante dal zero, perchè effendo ftati inventati quefti logaritmi a fine di facilitare, come abbiamo veduto ai num. 1124, 1125, 1126, 1127. le operazioni del moltiplicare, del dividere, dell' innalzare a potenze, e dell' eftrarre le radici, ed in tal cafo effendo zero il logaritmo dell' unità, rendonfi fempre più commode, e fpedite quefte operazioni, mentre nel loro calcolo non haffi a tener conto del logaritmo dell' unità. Stabilita poi di comune confenfo la progreffione aritmeti-

metica naturale principiante dal zero per la sede de' logaritmi, hanno pure di pari accordo sissata per la progressione geometrica la seguente 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000. 1000000. ec., così che sia.

Logaritmi	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	
Progr. geometrica	1.	10.	100.	1000.	10000.	100000.	1000000.	10000000.	ec.

1139. Ora egli è bensì vero, che per mezzo, de' logaritmi ne risulta un grandissimo comodo nel calcolare rispetto alle operazioni assegnate ai numeri 1124, 1125, 1126, 1127, ma egli è altresì evidente, che di un tale vantaggio si goderebbe soltanto, qualora al calcolo richiamar si dovessero i termini dell' anzidetta progressione geometrica, lo che rarissime volte, o quasi mai accadendo, ben si vede, che a poco, o nulla varrebbe un tale ritrovato.

1140. Affinchè pertanto una così vantaggiosa invenzione non solo ne' termini della progressione 1. 10. 100. 1000. ec., ma eziandio in tutti i numeri intermedj ai di lei termini, vale a dire in tutti i numeri naturali, de' quali abbisogniamo nelle Aritmetiche operazioni accennate, avesse luogo, è stato mestieri, dopo avere assegnati i logaritmi ai termini della progressione 1. 10. 100. ec. (giusta il num. 1138) ritrovare ancora i logaritmi, cioè i corrispondenti medj proporzionali aritmetici fra 0, e 1 per i numeri 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; fra 1, e 2 per i numeri 11, 12, 13, 14 ec. fino al 99; fra 2, e 3 per i numeri 101, 102, 103 ec. fino al 999. inclusivamente, e così susseguentemente, onde avere i logaritmi per qualsivoglia numero.

1141. Tutto l' artifizio poi non consiste in ritrovare soltanto i logaritmi corrispondenti a ciascun numero intermedio fra un termine, e l' altro della progressione, ma consiste altresì in prendere questi numeri intermedj in modo, che siano fra loro in progressione geometrica, vale a dire trovarli in maniera, che siano medj proporzionali geometrici fra i termini della progressione geometrica, siccome i loro corrispondenti logaritmi debbono essere medj proporzionali aritmetici fra i termini della sissata progressione aritmetica naturale; e ciò affinchè godere si possa dell' accennato vantaggio nel calcolare, di cui godere non si potrebbe, come dalle cose dette rendesi evidente, se queste non fossero quantità in progressione aritmetica, che corrispondessero ad altre in progressione geometrica.

1142. Come poi fra i termini dell' assunta progressione geometrica 1. 10. 100. 1000. ec. possano cadere i numeri della serie naturale 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, indi 11, 12, 13, ec. in ragione di medii proporzionali geometrici, s' intenderà facilmente con osservare, che se fra due quali si siano termini della progressione geometrica si troverà un medio proporzionale; indi fra il primo de' dati due termini, e questo ritrovato medio proporzionale, se ne prenda un' altro, poscia di nuovo fra il primo termine, e quest' ultimo medio se ne cerchi un' altro, e così in seguito (quale operazione devesi instituire fra tutti gli altri termini della progressione geometrica) coll' inserirsi continuamente questi medii proporzionali fra i termini della progressione geometrica, anderà all' infinito il numero de' suoi termini, e però ne risulterà una nuova progressione di termini fra loro differenti per una quantità minore di qualunque assegnabile, e conseguentemente in essa avranno luogo i termini della serie naturale 1, 2, 3, 4, 5, 6 ec. in ragione di medii proporzionali, se non esattamente, almeno con una differenza minore di qualunque assegnabile. Ma veniamone al fatto.

AR-

ARTICOLO II.

Modo di costruire le Tavole de' Logaritmi.

1143. LA costruzione delle Tavole de' Logaritmi importa due cose: La prima si è di determinare tutti i numeri naturali intermedi ai termini della stabilita progressione geometrica 1. 10. 100. 1000. ec., la seconda di ritrovarci i loro corrispondenti logaritmi; ma l'una, e l'altra devesi fare nel tempo stesso, e con tale artifizio, che i secondi siano medii proporzionali aritmetici, risguardanti i primi come medii proporzionali geometrici; per modo, che si serbi sempre la corrispondenza fra una progressione, e l'altra. Questi medii poi proporzionali geometrici devono essere perfettamente eguali, o almeno differire per un' errore insensibile da que' numeri, de' quali cercansi i logaritmi; al quale effetto bisogna talmente interpolare la progressione geometrica, che la ragione, con cui i di lei termini tendono all' infinito differisca dalla ragione d' egualità per una differenza minore di qualunque assegnabile. E' istessamente nella progressione aritmetica è d'uopo, che l'intervallo, con cui tendono all'infinito i di lei termini, sia minore di qualunque intervallo assegnabile.

1144. Nel ritrovare poi esattamente questi medii proporzionali una cosa potrebbe fare difficoltà, ed è, che rispetto ai medii geometrici per ritrovare fra due numeri un medio proporzionale geometrico bisogna dal loro prodotto estrarne la radice quadrata, lo che non si può sempre fare, perchè non tutti i prodotti di due dati numeri sono potestà seconde perfette, onde potergli estrarre la radice quadrata senza che avanzi un residuo da non potersi trascurare senza errore; nè parimente rispetto ai medii aritmetici tutte le somme di due estremi aritmetici sono tali da poterne avere esattamente la metà, qual servir deve di medio proporzionale aritmetico da assegnarsi per logaritmo al corrispondente medio proporzionale geometrico. Tale difficoltà però si appiana con aggiungere ai termini tanto della progressione aritmetica o. 1. 2. 3. ec., come ai termini della progressione geometrica 1. 10. 100. 1000. ec., un certo numero di zeri a piacere, per Esempio sette, lo che non è altro, che far uso de' decimali, mentre con tal mezzo nel determinare i ricercati medii proporzionali si può giungere per approssimazione a una espressione così poco differente dal vero, onde l'errore si possa senza scrupolo trascurare; imperocchè quando da un numero, che non è quadrato si leva la radice quadrata, essa differisce dalla vera, che è impossibile, per un eccesso, o difetto minore dell' unità; ma tale eccesso, o difetto è di tanto minor momento, quanto maggiore è il numero, da' cui tale radice si è levata: Per Esempio la radice quadrata di 19727 è 140, e di 10 è 3, delle quali nè l'una, nè l'altra è esatta, differendo ciascuna dalla vera per un difetto minore dell' unità, ma questo difetto è molto minore rispetto alla radice 140, che rispetto alla radice 3, poichè rispetto alla prima radice egli è minore di $\frac{1}{140}$, laddove rispetto alla seconda radice egli è soltanto minore di $\frac{1}{3}$; conseguentemente quanto maggiore è il numero non quadrato, da cui devesi estrarre la radice, tanto minore è l'eccesso, o il difetto della radice trovata dalla vera impossibile; conseguentemente siccome coll' aggiunta dell' accennato numero di zeri si viene ad avere un numero di gran lunga maggiore, così pure diminuendosi a proporzione l'accennato eccesso, o difetto,

vienfi perciò egli a potere francamente trafcurare. Ma veniamo all' Efempio, il quale rifchiarerà l'operazione, e renderà piano il metodo.

1145. Prob. Debbafi ritrovare il logaritmo di 2 primo numero dopo l'unità nella ferie de' numeri naturali.

1146. Rifol. Poichè il propofto numero 2 cade tra 1, e 10 della progreffione geometrica, o fia tra 1. 0000000, e 10. 0000000 per l'aumento accennato al num. 1144, fa di meftieri, che il fuo logaritmo cada fra 0. 0000000, e 1. 0000000 della progreffione aritmetica, che fono i logaritmi degli affunti termini della progreffione geometrica. Ora per avere quefto medio aritmetico corrifpondente come logaritmo al 2 devonfi primieramente trovare fra i due detti termini della progreffione geometrica tanti medii proporzionali, e corrifpondentemente a ciafcuno di loro il conveniente medio proporzionale aritmetico, finchè fi giunga a un medio geometrico, che fia 2, cioè 2. 0000000, o la di cui differenza da 2. 0000000 non fia confiderabile, e in tal cafo il medio aritmetico che vi fi troverà corrifpondere, farà il ricercato logaritmo di 2. Siano pertanto A, B (fi offervi la feguente Tavola) i due termini della progreffione geometrica, fra' quali fi prenda un medio proporzionale (pel num. 1111.), che trovafi effere 3. 1622777 C, a cui fi trovi il corrifpondente logaritmo fra i termini 0. 0000000, e 1. 0000000 (pel num. 1036.), che è 0. 5000000 da fcriverfegli dirimpetto. Se il poc' anzi ritrovato medio geometrico foffe 2. 0000000, o per lo meno differente di un' errore infenfibile, fi avrebbe lo che fi cerca, e il ritrovato medio aritmetico 0. 5000000 farebbe il fuo logaritmo: Ma il ritrovato medio geometrico C effendo $3\,\frac{1622777}{10000000}$, e però molto maggiore di 2. 0000000, però è d'uopo ritrovare fra quefto medio C maggiore, ed il numero A minore un'altro medio proporzionale geometrico, che farà D, e ifteffamente il conveniente medio aritmetico fra i loro logaritmi. Quefto poi nuovo medio geometrico D è bensì minore di 2. 0000000, ma gli fi accofta più affai, che il numero A, però lafciando da parte il numero A, fi cerchi un terzo medio geometrico E tra D, e C, e così pure fra i loro logaritmi fi trovi il fuo corrifpondente logaritmo. Il ritrovato medio geometrico E effendo maggiore di 2. 0000000, fra E, e D fi trovi un quarto medio proporzionale geometrico F, ma perchè ancora quefto è maggiore di 2. 0000000, fe ne deve trovare un quinto G tra D, e F; e così fucceffivamente fi deve procedere ricercando un medio geometrico tra il proffimo medio geometrico maggiore trovato, e il proffimo minore al 2. 0000000, finchè ne venga un tal medio geometrico, che fia 2. 0000000, o vi differifca per un' errore difprezzabile; e con affegnare a ciafcuno di quefti medii geometrici il fuo logaritmo, allorchè fi farà ritrovato il detto medio geometrico 2. 0000000, fi dovrà prendere il fuo corrifpondente medio aritmetico, che trovafi effere 0. 3010300, pel logaritmo di 2. Nella prefente Tavola fi veda il numero de'medii proporzionali geometrici, e aritmetici neceffarii a trovarfi per poter giungere a determinare il logaritmo del 2.

1147. Con eguale artifizio fi troveranno i logaritmi degli altri numeri primi, che cadono tra 1, e 10; tra 10, e 100; tra 100, e 1000 ec. Ed ecco di quanta fatica fia il ritrovare codefti logaritmi, mentre per ritrovare il folo logaritmo di 2 è ftato neceffario trovare ventiquattro medii proporzionali geometrici co' loro logaritmi.

Cal-

Calcolo per l' invenzione del Logaritmo di 2.

	Medii geometrici.	Logaritmi
A	1. 0000000	0. 0000000
C	3. 1622777	0. 5000000
B	10. 0000000	1. 0000000
A	1. 0000000	0. 0000000
D	1. 7782794	0. 2500000
C	3. 1622777	0. 5000000
D	1. 7782794	0. 2500000
E	2. 3713737	0. 3750000
C	3. 1622777	0. 5000000
D	1. 7782794	0. 2500000
F	2. 0535249	0. 3125000
E	2. 3713737	0. 3750000
D	1. 7782794	0. 2500000
G	1. 9109529	0. 2812500
F	2. 0535249	0. 3125000
G	1. 9109529	0. 2812500
H	1. 9809566	0. 2968750
F	2. 0535249	0. 3125000
H	1. 9809566	0. 2968750
I	2. 0169144	0. 3046875
F	2. 0535249	0. 3125000
H	1. 9809566	0 2968750
K	1. 9988546	0. 3007812
I	2. 0169144	0. 3046875
K	1. 9988546	0. 3007812
L	2. 0078642	0. 3027344
I	2. 0169144	0. 3046875
K	1. 9988546	0. 3007812
M	2. 0033543	0. 3017578
L	2. 0078642	0. 3027344
K	1. 9988546	0. 3007812
N	2. 0011032	0. 3012695
M	2. 0033543	0. 3017578
K	1. 9988546	0. 3007812
O	1. 9999786	0. 3010253
N	2. 0011032	0. 3012695

	Medii geometrici.	Logaritmi
O	1. 9999786	0. 3010253
P	2. 0005408	0. 3011474
N	2 0011032	0. 3012695
O	1. 9999786	0. 3010253
Q	2. 0002596	0. 3010864
P	2. 0005408	0. 3011474
O	1. 9999786	0. 3010253
R	2. 0001190	0. 3010558
Q	2. 0002596	0. 3010864
O	1. 9999786	0. 30.0253
S	2. 0000489	0. 3010406
R	2. 0001190	0. 3010558
O	1. 9999786	0. 3010253
T	2. 0000137	0. 3010329
S	2. 0000489	0. 3010405
O	1. 9999786	0. 3010406
V	1. 9999961	0. 3010291
T	2. 0000137	0. 3010329
V	1. 9999961	0. 3010291
X	2. 0000048	0. 3010310
T	2. 0000137	0. 3010329
V	1. 9999961	0 3010291
Y	2 0000004	0. 3010301
X	2. 0000048	0 3010310
V	1. 9999961	0. 3010291
Z	1. 9999982	0. 3010296
Y	2. 0000004	0. 3010301
Z	1. 9999982	0. 3010291
W	1. 9999993	0. 30.0298
Y	2. 0000004	0. 3010301
W	1. 9999993	0. 3010298
Π	1. 9999998	0. 3010299
Y	2. 0000004	0. 3010301
Π	1. 9999998	0. 3010299
Δ	2. 0000000	0. 3010300
Y	2. 0000004	0. 3010301

1148. Ben è vero però, che tale fatica non si richiede per determinare il suo logaritmo a ciascuno de' numeri della serie naturale, esigendosi solamente un tal calcolo per i logaritmi de' numeri primi, mentre i logaritmi de' numeri composti si hanno facilissimamente per mezzo de' logaritmi de' numeri primi; imperocchè per avere il logaritmo, che conviene al prodotto nato dalla moltiplicazione di due numeri primi, basta prendere (pel num. 1124.) la somma dei logaritmi dei detti due numeri. Per avere il logaritmo, che corrisponde al quoziente nato dalla divisione di un numero composto per un numero primo, o composto, basta prendere (pel num. 1127.) la differenza dei logaritmi dei detti due numeri. Per avere il logaritmo, che conviene ad una qualunque potestà di un dato numero, basta prendere il prodotto (pel num. 1125.), che nasce dal moltiplicarsi il suo logaritmo nell' esponente della potestà proposta. Finalmente per avere il logaritmo, che conviene ad una qualunque radice di un dato numero, basta prendere (pel num. 1126.) il quoziente, che nasce dal dividersi il suo logaritmo per quel numero, che corrisponde alla radice cercata; cioè per 2 rispetto alla radice quadrata, per 3 rispetto alla radice cuba ec.

1149. Per ritrovare il logaritmo di 2 abbiamo poc' anzi assunto 1. 0000000 pel logaritmo del 10, perchè si trattava di ritrovare un logaritmo solitario; ma quando trattasi di costruire le Tavole fa d' uopo accrescere il logaritmo del 10 di tre, quattro, o cinque zeri, onde sia 1. 0000000. 000; ovvero 1. 0000000. 0000; o pure 1. 0000000. 00000; e con questo logaritmo devonsi ritrovare gli altri, dai quali poscia hansi a levare a destra altrettante figure, quanti furono i zeri aggiunti al logaritmo del 10; osservando però che siccome le figure, che devonsi levare a destra, non sono altro, che il numeratore di una frazione, il di cui denominatore è l' unità accompagnata da tanti zeri, quante sono le suddette figure, se tale numeratore eccederà la metà del denominatore, in tal caso al logaritmo, da cui sono state levate le dette figure, si deve aggiungere una unità. Per lo che il logaritmo 3. 3803921. 600, o sia 3. 3803921, $\frac{600}{1000}$, che corrisponde al numero 2401, sarà 3. 3803922. Il motivo poi dell' accennato aumento si è a fine di avere i logaritmi esatti, mentre nel costruire le Tavole de' logaritmi bisogna guardarsi dal trascurare anche i piccoli errori, ai quali si può sorpassare nel ritrovare un logaritmo separatamente, come sarebbe nel logaritmo 1. 0000000. 04 si può trascurare la frazione $\frac{4}{100}$; ma questa frazione non si può già trascurare nel costruire le Tavole, a motivo, che tale errore, abbenchè piccolo, più volte ripetuto non risulti notabile; imperocchè il non potersi avere il più delle volte i logaritmi accurati (pel num. 1144.), nè ritrovandosi i logaritmi susseguenti, che per mezzo de' precedenti già trovati, fa, che l' errore, benchè piccolo, commesso ne' primi si raddoppj, si triplichi ec. ne' seguenti, e così l' errore d' insensibile si faccia sensibile: E siccome poi tale errore versa solamente nell' ultime figure a destra, egli è chiaro, che ritrovandosi i logaritmi giusta l' anzidetto aumento, indi dai ritrovati logaritmi separando tante figure a destra, quanti furono i zeri aggiunti, si avranno in tal modo i logaritmi immuni da errore. Per Esempio il logaritmo del 7 calcolato al logaritmo 1 . 0000000 del 10 è 0.8450980. e calcolato al logaritmo 1.0000000. 000 del 10. è 0. 8450980. 400. Ora se dell' uno, e dell' altro si prenderà il quadruplo per avere il logaritmo di 2401, che è il quadrato-quadrato di 7, il primo sarà 3. 3803920, ed il secondo 3. 3803921. 600, cioè 3. 3803922 maggiore di due uni-

unità dell'altro, lo che nasce dall'ultime figure a destra 400 della frazione $\frac{400}{1000}$ nel secondo logaritmo, le quali nel progresso delle operazioni ascendono a 1, a 2, a 3 ec.

1150. Col calcolare i logaritmi al logaritmo 1. 0000000. 000 del 10 si gode d'un altro benefizio, ed è, che siccome le differenze de' logaritmi vanno sempre decrescendo finchè del tutto svaniscano, e per i numeri prossimi, assai grandi i logaritmi risultano eguali, questa eguaglianza si differirà ai numeri molto più grandi con calcolare i loro logaritmi al logaritmo per Esempio 1. 0000000. 000 del 10, di quello che calcolarli al logaritmo 1. 0000000 del 10, così che di quei numeri i logaritmi, che, essendo calcolati al logaritmo 1. 0000000 del 10, risultano eguali, serbano ancora qualche differenza, qualora siano calcolati al logaritmo 1. 0000000. 000 del 10: Per Esempio essendo calcolati i logaritmi al logaritmo 1. 0000000 del 10, tanto del numero 2656385774, come del numero 2656385775 il logaritmo è 9. 4242911; laddove se i logaritmi saranno calcolati al logaritmo 1. 0000000. 000 del 10; il logaritmo del 2656385774 sarà 9. 4242911. 457, e il logaritmo del 2656385775 sarà 9. 4242911. 459, fra' quali si conserva qualche differenza.

1151. Ho dato il modo di costruire le Tavole de' Logaritmi, de' quali l' Inventore è stato Giovanni Nepero, quantunque già le abbiamo per opera di Enrico Briggio, e di Adriano Ulacq, il primo de' quali ci diede i logaritmi dei numeri naturali da 1 fino a 20000, e da 90000 fino a 100000; il secondo poi da 20000 fino a 90000, ma ciò ho fatto, affinchè più s'interni a scuoprire la natura di questi logaritmi, e niuna cosa resti a desiderarsi. Nelle anzidette Tavole sono disposti i numeri assoluti da 1 fino a 100000 in una colonna verticale, e dirimpetto a ciascuno è collocato il suo corrispondente logaritmo. I medii geometrici, e aritmetici, che hanno servito a ritrovare questi logaritmi, non appariscono in dette Tavole, perchè a nulla servono. Acciò si veda come sono formate queste Tavole darò al num. 1275. i logaritmi dei numeri da 1 fino a 100.

1152. Si osservi, che i logaritmi dei numeri, i quali cadono fra 1, e 10 incominciano dal 0; i logaritmi dei numeri, che cadono fra 10, e 100 incominciano dall'unità; quelli che cadono fra 100, e 1000 incominciano dal 2, quelli, che cadono fra 1000, e 10000 incominciano dal 3 ec. Ora queste zifre 0, 1, 2, 3, 4 ec. separate con un punto, come le frazioni decimali, e da cui cominciano i logaritmi, si chiamano le caratteristiche de' logaritmi, le quali contengono tante unità una meno, quante figure contiene il corrispondente numero assoluto; e però il loro uffizio è indicare per quante figure il detto numero si scosti dall'unità.

1153. Corol. 1. Per lo che dato essendo un qualunque numero si saprà subito che caratteristica convenga al suo logaritmo: E *vice versa* dato un qualunque logaritmo, con osservare la sua caratteristica si saprà di quante figure debba costare il suo corrispondente numero assoluto.

1154. Corol. 2. Siccome ai termini della progressione geometrica 1. 10. 100. 1000. ec. si sono dati per logaritmi i termini della progressione aritmetica 0. 0000000, 1. 0000000, 2. 0000000, 3. 0000000 ec., egli è chiaro, che ogniqualvolta un numero costi della sola unità accompagnata da alcuni zeri, il suo logaritmo non avrà altre figure significative, che la caratteristica: Qualunque altro numero poi avrà un logaritmo, che oltre la caratteristica, costerà d'una frazione decimale.

1155.

1155. Corol. 3. In oltre essendo 3 la caratteristica di 1000; 2 la caratteristica di 100; 1 la caratteristica di 10: e 0 la caratteristica di 1, egli è evidente, che la caratteristica di una frazione propria, la quale è minore dell' unità, deve essere un numero preso in uno stato opposto ai precedenti, che perciò chiamasi difettivo, o negativo, e il quale viene bensì espresso dai numeri della serie naturale, ma però per distinguerlo vi si prefigge il segno —, così — 0. 3679767.

1156. Corol 4 E perchè la frazione minore dista più dall'unità, che la frazione maggiore, quanto minore sarà la frazione, altrettanto maggiore sarà il suo logaritmo difettivo.

1157. Corol. 5. Il logaritmo dell'unità pertanto è quel termine, dal quale cominciano a crescere i logaritmi positivi, e a calare i difettivi.

1158. Si osservi in oltre, che i numeri, i quali stanno fra loro in ragione decupla, centupla ec. hanno lo stesso logaritmo, a riserva della caratteristica, come si può vedere in questo Esempio.

Numeri assoluti	Logaritmi
5	0. 6989700
50	1. 6989700
500	2. 6989700
5000	3. 6989700

e però avendosi il logaritmo di un numero, basta solo mutarci la caratteristica per avere i logaritmi degli altri numeri, che stanno con lui in ragione decupla, centupla ec. mutarci dissi la caratteristica a norma del num. 1152.

1159. Ho detto al num. 1150, che le differenze dei logaritmi si vanno continuamente diminuendo, così che in ultimo risultino eguali i logaritmi de' massimi numeri, e la ragione di ciò nasce dalla corrispondenza, che devono avere i proporzionali aritmetici, o sia i logaritmi ai proporzionali geometrici; imperocchè siccome la proporzione de' numeri assoluti va sempre decrescendo, così che ne' massimi numeri resti come insensibile, mentre l'unità sta al 2 in ragione suddupla; il 2 sta al 3 in ragione sussesquialtera; il 3 sta al 4 in ragione sussesquiterza ec., così pure la differenza tra un logaritmo, e l'altro deve sempre andarsi diminuendo a segno, che finalmente resti nulla, e però tali logaritmi risultino eguali.

1160. Qui ha luogo rispetto ai logaritmi lo che ho detto degli esponenti ai num. 1116, e 1117, cioè che il logaritmo di qualsivoglia numero indica la potestà, il luogo, e l' ordine, che nella serie de' numeri naturali ha il proposto numero: Per Esempio si ponga, che la ragione fra 1, e 10 sia divisa in 10000000 parti, e però dall' unità fino al 10. inclusivamente si numerino 10000000 termini medj proporzionali, egli è chiaro, che il numero 10 sarà nel luogo 10000000^mo; e mediante tal calcolo si troverà, che tra 1, e 2 vi sono 3010300 termini proporzionali, cioè il 2 sta nel luogo 3010300^mo: Istessamente tra 1, e 3 cadono 4771213 termini proporzionali, e però il 3 è nel luogo 4771213^mo ec. Per la qual cosa nella proposta progressione geometrica 1, 10, 100 ec. devonsi intendere moltissimi medj continui proporzionali, così che fra 1, e 10 vi siano tanti medj proporzionali, quante unità meno una trovansi nel logaritmo del 10, cioè 9999999; e perchè la ragione trà 10, e 100 è la stessa, che la ragione tra 1, e 10, però

tra

tra 10, e 100 cadranno altri 9999999 medj continui proporzionali; e così pure tra 100, e 1000 ec., conseguentemente tra 1, e 100 cadranno 20000000 medj proporzionali: tra 1, e 1000 ve ne cadranno 30000000 ec., cioè a dire trà l' unità, e qualunque numero della serie naturale cadranno tanti medj proporzionali, quanti ne esprime il logaritmo di tale numero: Per lo che il logaritmo di qualunque numero esprimendo la distanza, che passa fra l' unità, e tale numero, egli sarà il logaritmo della ragione dell' unità allo stesso numero, vale a dire definirà il numero delle ragioni eguali, dalla composizione delle quali risulta la ragione dell' unità al detto numero.

1161. I logaritmi dell' unità, e del 10, da quali viene fissata la progressione Aritmetica, si chiamano logaritmi radicali. Logaritmo razionale è quello, che si puo accuratamente ritrovare, ed esprimere; logaritmo poi irrazionale e quello, che non è esattamente giusto.

1162. I Logaritmi sono stati chiamati numeri artifiziali, poichè non sono quantità assolute, ma relative, le quali non si possono intendere, se non si facciano presenti ancora le altre quantità, a cui esse corrispondono come logaritmi.

ARTICOLO III.

Delle operazioni riguardanti i logaritmi.

1163. PRob. 1. Essendo dato un numero intero minore del numero massimo delle Tavole (che essendo le ordinarie in piccolo danno i logaritmi dei numeri da 1 fino a 10000), si debba ritrovare nelle medesime Tavole il suo logaritmo.

1164. Risol. Si cerchi il dato numero nelle colonne, che contengono i numeri assoluti, e a lui dirimpetto a destra si troverà il suo logaritmo: Per Esempio volendosi il logaritmo di 8735, si cerchi questo numero nelle colonne de' numeri assoluti, e perchè vi si ritrova dirimpetto a destra 3. 9412629, questi sarà il suo logaritmo.

1165. Che se il numero dato sarà bensì maggiore del numero massimo delle Tavole, ma però tale, che possa essere diviso in due, tre quattro ec. altri numeri, ognuno de' quali sia minore del massimo delle Tavole, in tale caso si avrà il logaritmo del proposto numero con prendere la somma dei logaritmi de' numeri, ne' quali egli può essere diviso: Per Esempio volendosi il logaritmo di 47267268750, poichè egli risulta dal prodotto de' seguenti tre numeri 8735, 962, 5625, si prendano i logaritmi di questi tre numeri, e la loro somma darà il logaritmo cercato (pel num. 1124)

	3. 9412629	Logarit. di 8735
	2. 9741751	Logarit. di 962
	3. 7501225	Logarit. di 5625
Somma	10. 6655605	Logarit. cercato di 47267268750

1166. Qualora sia dato un numero maggiore del massimo 10000 delle Tavole, ma che non ecceda il 100000000 prodotto dello stesso massimo moltiplicato in se stesso, per Esempio 3567894, che o non si possa dividere in due, ognuno de' quali

si sia minore del massimo delle Tavole, o non se ne voglia la briga, si troverà il suo logaritmo così. Si separino a destra del dato numero 3567894 tante figure, quante basta perchè ne risulti un numero minore del massimo delle Tavole, che però nel presente caso se gli dovranno tagliar via le tre prime figure a destra (lo che non è altro, che dividerlo per 1000), e si avrà 3567. Di questo numero 3567 si trovi il logaritmo, che è 3. 5523031, con cui si sommi il logaritmo di 1000, che è 3. 0000000, e si avrà 6. 5523031, che è il logaritmo di 3567000 (pel num. 1124) = 3567X1000. Ora siccome questo numero 3567000 è minore del proposto numero 3567894, così il logaritmo trovato è minore del logaritmo, che si cerca, e però fa di mestieri ritrovare questa differenza, la quale aggiunta al trovato logaritmo 6. 5523031 darà il logaritmo cercato. Per ritrovarla intanto si faccia così. Si sotri il logaritmo di 3567 dal logaritmo di 3568, e colla differenza 1217, che è ancora la differenza de' logaritmi di 3567000, e 3568000, si instituisca la seguente analogia, dicendo: Se la differenza 1000 ne' numeri dà di differenza ne' logaritmi 1217, la differenza 894 ne' numeri qual differenza darà ne' logaritmi? e si trova pel quarto proporzionale 1087, che aggiunto a 6. 5523031 logaritmo di 3567000, dà 6. 5524118 logaritmo di 3567894.

1167. Quantunque le differenze de' numeri non siano perfettamente proporzionali alle differenze de' logaritmi, la cosa però in pratica riesce senza sensibile errore. Nel fare poi la separazione delle figure a destra si deve osservare di separarne tante a segno, che il numero rimasto si accosti il più, che sia possibile al massimo delle Tavole, perchè le differenze de' logaritmi sono meno ineguali al fine delle Tavole, che nel principio, cioè si accostano più alla proporzione de' numeri naturali.

1168. Prob. 2. Essendo dato un logaritmo minore del logaritmo massimo delle Tavole, si debba ritrovare il suo corrispondente numero.

1169. Risol. Si cerchi nelle Tavole il logaritmo dato, e dirimpetto a sinistra si troverà il suo corrispondente numero assoluto: In tale ricerca poi deve servire di regola la caratteristica: Per Esempio essendo dato il logaritmo 3. 0034605, di cui si voglia sapere il corrispondente numero assoluto, si cerchi nelle Tavole questo logaritmo, e perchè vi si trova dirimpetto a sinistra il numero 1008, egli sarà il numero assoluto corrispondente a tale logaritmo.

1170. Che se il proposto logaritmo non si troverà nelle Tavole, ma si trovi bensì un'altro logaritmo a lui eguale, e differente soltanto nella caratteristica, si osservi se la caratteristica del logaritmo dato è minore, o maggiore della caratteristica del logaritmo trovato nelle Tavole: Se è minore, si prenda il numero assoluto corrispondente al logaritmo trovato, quale si diminuisca di tante figure a destra, quante sono le unità, con cui la caratteristica del logaritmo dato differisce dalla caratteristica del logaritmo trovato, e queste residue figure a sinistra daranno il numero cercato, il quale sarà accompagnato da una frazione decimale, il di cui numeratore verrà formato dalle figure, che si tagliano via, e il denominatore sarà l'unità accompagnata da tanti zeri, quante furono le dette figure levate via. Debbasi per Esempio trovare il numero corrispondente al dato logaritmo 2. 6893089, che non si trova nelle Tavole, ma ritrovasi bensì 3. 6893089, a cui corrisponde 4890. Perchè la differenza delle due caratteristiche è 1, il numero corrispondente al logaritmo proposto sarà $489\frac{0}{10}$, cioè 489. Così se fosse stato proposto il logaritmo 1. 6893089, dove la differenza delle caratteristiche è 2, il suo corrispondente

te numero sarebbe $48\frac{90}{100}$. Se fosse stato o. 6893089, il suo numero corrispondente sarebbe $4\frac{890}{1000}$. Che se poi la caratteristica del logaritmo dato è maggiore della caratteristica del logaritmo trovato nelle Tavole, si prenda il numero assoluto, che corrisponde al logaritmo trovato; quale si accresca di tanti zeri a destra, quante sono le unità, con cui differiscono le caratteristiche di questi due logaritmi; e questo numero così accresciuto sarà il numero, che corrisponde al logaritmo proposto: Per Esempio essendo dato il logaritmo 4. 5523031, che non ritrovasi nelle Tavole, ma si ritrova bensì 3. 5523031, a cui corrisponde 3567, però il numero conveniente al dato logaritmo sarà 35670, perchè la differenza delle caratteristiche è 1.

1171. Qualora il logaritmo proposto in niuna maniera si ritrova nelle Tavole, ciò sarà segno, che avrà sempre annessa una frazione il numero a lui corrispondente: Per trovare pertanto tale numero si faccia così: Si prenda primieramente il numero corrispondente al logaritmo prossimo inferiore, poscia si determini la frazione, che gli si deve aggiungere, in questo modo: Si prendano nelle Tavole il logaritmo prossimo maggiore, e il prossimo minore del logaritmo dato, indi dal maggiore si sottri il minore, e il residuo si faccia denominatore, dopo di che si sottri lo stesso minore dal logaritmo dato, ed il residuo sarà il numeratore della frazione da aggiungersi al numero trovato: Sia dato per Esempio il logaritmo 3. 7589982, di cui si voglia il corrispondente numero: Si prendano i logaritmi prossimo maggiore, e prossimo minore, che sono 3. 7590632, e 3. 7589875, de' quali la differenza è 757, che deve essere il denominatore; la differenza poi tra il logaritmo dato, e il prossimo minore è 107, che deve essere il numeratore, e però la frazione sarà $\frac{107}{757}$, quale aggiunta al numero 5741 corrispondente al logaritmo prossimo minore, si avrà $5741\frac{107}{757}$ numero, che conviene al logaritmo proposto.

1172. Se poi il logaritmo dato sarà maggiore del massimo delle Tavole, si troverà il suo numero corrispondente così: dal logaritmo dato si sottri il logaritmo di un numero minore, come di 10, di 100, di 1000, o di qualche altro numero, purchè sia tale, che abbia un logaritmo minore del logaritmo massimo delle Tavole. Del logaritmo residuo si trovi il numero corrispondente, quale si moltiplichi nel numero di quel logaritmo, che fu sottratto, ed il prodotto sarà il numero cercato: Ecco l'Esempio

Logaritmo dato	7. 7589982	
Si sottri	4. 0000000	logaritmo di 10000
Logaritmo residuo	3. 7589982,	a cui corrisponde il nu-

mero $5741\frac{11}{100}$. Dunque $5741\frac{11}{100} \times 10000 = 57411100$, che è il numero cercato. Il numero poi conveniente al residuo logaritmo 3. 7589982 si è trovato giusta il num. 1171

1173. Prob. 3. Si debba ritrovare il logaritmo di una data frazione.

1174. Rifol. Dal logaritmo del denominatore fi fottri il logaritmo del numeratore, e il refiduo farà il logaritmo difettivo corrifpondente alla propofta frazione: Per Efempio dovendofi ritrovare il logaritmo della frazione $\frac{3}{4}$, fi farà,

	0. 6020600	logarit. del denominatore 4
	0. 4771212	logarit. del numeratore 3
Refiduo	— 0. 1249388	logarit. della frazione $\frac{3}{4}$

1175. Dim. Pel num. 214. la frazione è un quoziente nato dalla divifione del numeratore pel denominatore, e però, ftando il dividendo al divifore, come il quoziente all' unità, ella è il prodotto del dividendo nell' unità divifo pel divifore, e confeguentemente il fuo logaritmo (pel num. 1127.) farà la differenza de' logaritmi del numeratore, e del denominatore: E ficcome nelle frazioni propriamente tali il denominatore è maggiore del numeratore, così pure il logaritmo del denominatore è maggiore del logaritmo del numeratore, per lo che non potendofi fottrarre quello da quefto, fa di meftieri fottrarre il logaritmo del numeratore dal logaritmo del denominatore, con che ne viene il logaritmo difettivo. Lo che fi doveva dimoftrare.

1176. Corol. 1. Quindi le frazioni, che hanno per numeratore l'unità, hanno lo fteffo logaritmo del denominatore, fe non che vi fi deve prefiggere il fegno — per indicare, che egli è un logaritmo difettivo: Così della frazione $\frac{1}{6}$ il logaritmo è — 0. 7781512.

1177. Corol. 2. E perchè nelle frazioni improprie il numeratore è maggiore del denominatore, fi avrà il fuo logaritmo con levare il logaritmo del denominatore dal logaritmo del numeratore: E però della frazione $\frac{13}{5}$ il logaritmo farà

	1. 1139433	logaritmo del numeratore 13
	0. 6989700	logarit. del denominatore 5
Refiduo	0. 1449733	logarit. della frazione $\frac{13}{5}$

e confeguentemente in quefto modo fi dovrà regolare per avere il logaritmo di un' intero con frazione, come $2\frac{3}{5}$, mentre egli equivale alla frazione impropria $\frac{13}{5}$.

1178. Corol. 3. Siccome poi (pel num. 221.) il valore della frazione fuffifte fempre lo fteffo, comunque fi cambj la lei efpreffione, purchè la ragione del numeratore al denominatore fia fempre la medefima, come in quefte frazioni $\frac{1}{8}$;

$\frac{3}{24}$;

$\frac{3}{24}$; $\frac{125}{1000}$, perciò prendendosi qual più si vuole, il loro logaritmo sarà lo stesso, o sia sarà sempre la medesima la differenza tra il logaritmo del numeratore, e il logaritmo del denominatore.

1179. Corol. 4. E dappoichè i decimali non altro sono, che frazioni, il di cui denominatore è l'unità accompagnata da tanti zeri quante sono le figure decimali, se il dato decimale non avrà parti intere come o. 194, si avrà il suo logaritmo (pel num. 1174.), che sarà — o. 7121983: Che se avrà parti intere, come 8. 735, si avrà il suo logaritmo (giusta il num. 1177) con levare cioè dalla caratteristica del logaritmo del numeratore la caratteristica del logaritmo del denominatore, e il residuo sarà il logaritmo della frazione: E perchè la caratteristica del logaritmo del denominatore della frazione decimale è eguale all'apice massimo della stessa frazione, si avrà il logaritmo di tale frazione con levare dalla caratteristica del logaritmo del numeratore l'apice massimo suddetto; E però si avrà il logaritmo di 8. 735 così

	3. 9412629	logarit. del numeratore 8735
	3. 0000000	logarit. del denominatore . 1000
Residuo	o. 9412629	logarit. della frazione 8. 735

1180. Prob. 4. Dato un logaritmo difettivo si debba ritrovare il suo corrispondente numero assoluto.

1181. Risol. Dal logaritmo massimo delle Tavole si levi il proposto logaritmo difettivo, indi del logaritmo residuo si trovi (pel num. 117:.) il corrispondente numero, che sarà il numeratore di una frazione, il di cui denominatore è 10000.

1182. Dim. Poichè dal logaritmo di 10000 si è levato il logaritmo di una frazione, starà 10000 al numero del residuo logaritmo, come l'unità sta alla frazione corrispondente al dato logaritmo difettivo: Adunque (pel num. 495.) se si prenderà 10000 per denominatore, il numero corrispondente al residuo logaritmo sarà il numeratore della cercata frazione. Lo che ec.

1183. Essendo per Esempio dato il logaritmo difettivo — o. 3679767, di cui si voglia il corrispondente numero, si farà

	4. 0000000	logarit. di 10000
	— o. 3679767	logarit. dato difettivo
Residuo	3. 6320233	logarit. a cui corrisponde $4285\frac{71}{100}$;

e però sarà $\frac{428571}{1000000}$ la frazione, a cui corrisponde il dato logaritmo difettivo — o. 3679767.

1184. Prob. 5. Debbasi ritrovare mediante i logaritmi il prodotto, che nasce dal moltiplicarsi insieme due dati numeri.

1185. Risol. Si sommino insieme i logaritmi de' dati due numeri, ed il numero, che a tale somma corrisponderà, sarà il prodotto cercato.

1186. La Dim. costa dal num. 1124.

ESEMPIO.

1187. Prob. 6. Cercasi quante volte in un' ora passa pel cuore tutta la Massa del sangue umano.

1188. Risol. A ciascun minuto secondo in circa corrisponde una pulsazione, la quale ha origine dal gonfiarsi dell' Aorta, in cui ad ogni contrazione del cuore il di lui destro ventricolo scarica due oncie di sangue; e però ad ogni minuto primo passano pel cuore 120 oncie di sangue: Se pertanto si moltiplicherà il 120 per 60 si avrà la quantità del sangue, che passa pel cuore in un' ora. Ora questo prodotto si avrà mediante i logaritmi così.

	2. 079181	logaritmo di 120
	1. 778151	logaritmo di 60
Somma	3. 857332	logaritmo di 7200 prodotto cercato; per

lo che passano pel cuore in un' ora 7200 oncie di sangue, o sia 600 libre di sangue: Ma un' uomo non ha più di 25 libre di sangue, dunque in un' ora tutta la Massa del sangue passa 24 volte pel cuore.

1189. Qualora poi si debba moltiplicare un' intero con una frazione, se ne avrà il prodotto per mezzo de' logaritmi con sottrarre il logaritmo del denominatore della frazione dalla somma de' logaritmi dell' intero, e del numeratore: Come volendosi il prodotto di 128 moltiplicato in $\frac{5}{8}$, si farà

	2. 107210	logaritmo dell' intero 128
	0. 698970	logaritmo del numeratore 5
Somma	2. 806180	
	0. 903090	logaritmo del denominatore 8
Residuo	1. 903090	logaritmo di 80 prodotto di 128 in $\frac{5}{8}$.

1190. Prob. 7. Si debba ritrovare mediante i logaritmi il quoziente, che nasce dal dividersi un numero per un' altro.

1191. Risol. Si sottri il logaritmo del divisore dal logaritmo del dividendo, e il numero, che corrisponderà al residuo logaritmo sarà il quoziente cercato.

1192. La Dim. costa dal num. 1127.

ESEM-

ESEMPIO.

1193. Prob. 8. Cercasi quanto sughero debbasi attaccare a un corpo umano, il di cui peso è di libbre 175, acciò egli diventi della medesima gravità specifica dell'acqua.

1194. Risol. Sia cognita la gravità specifica del corpo umano, che sia 10; dell'acqua, che sia 9; e del sughero, che sia 2: Ora perchè i loro volumi (supposto lo stesso peso) sono reciprocamente proporzionali ai numeri, che esprimono le gravità specifiche; il volume dell'acqua sarà 10, del corpo sarà 9, e del sughero sarà $\frac{10 \times 9}{2} = 45$: Ma siccome il peso assoluto risulta dalla gravità specifica moltiplicata nel volume, perciò si avrà il ricercato peso del sughero da aggiungersi al corpo umano per renderlo di gravità specifica eguale all'acqua con dividere per la differenza, che passa tra il volume del sughero, e quello dell'acqua, il prodotto del peso del corpo umano nel volume dell'acqua diminuito del prodotto dello stesso peso del corpo umano nel suo volume, e però sarà $\frac{175 \times 10 - 175 \times 9}{45 - 10}$ $= \frac{175}{35}$. Ora per avere questo quoziente mediante i logaritmi, si faccia così:

	2. 243038	logaritmo del dividendo 175
	1. 544068	logaritmo del divisore 35
Residuo	0. 698970	logaritmo di 5, che è il quoziente cercato, peso

del sughero da aggiungersi al corpo umano, acciò sia di gravità specifica eguale all'acqua. Se pertanto si accrescerà questo peso di libbre 5 di sughero, il detto corpo sarà sicuro di non affondare.

1195. Qualora poi si debba dividere un numero intero per una frazione si avrà il quoziente per mezzo de' logaritmi con sottrarre il logaritmo del numeratore dalla somma de' logaritmi dell'intero, e del denominatore: Così dovendosi dividere 256 per $\frac{2}{3}$, si farà

	2. 408240	logaritmo dell'intero 256
	0. 477121	logaritmo del denominatore 3
Somma	2. 885361	
	0. 301030	logaritmo del numeratore 2
Residuo	2. 584331	logaritmo di 384 quoziente cercato

1196. Se poi si dovrà dividere una frazione per un intero, bisognerà sottrarre dal logaritmo del numeratore la somma de' logaritmi del denominatore, e dell'intero, e il residuo sarà il logaritmo del quoziente cercato.

1197. Prob. 9. Per mezzo de' logaritmi si debba innalzare un dato numero a qualsivoglia potestà.

1198. Risol. Per l'esponente della potestà proposta si moltiplichi il logaritmo del numero dato, ed il numero corrispondente al nuovo logaritmo sarà la potestà cercata. La Dim. consta dal num. 1125.

ESEM-

ESEMPIO.

1199. Prob. 10. Dato il tempo, come 118 secondi, scorso dal punto, in cui si è dato fuoco a un Mortaro, finchè la Bomba cade in terra, debbasi determinare l'altezza, a cui si è elevata la Bomba.

1200. Risol. Si prenda la metà del tempo dato, quale s'innalzi al quadrato, poscia, perchè sappiamo dall'Ugenio, che un grave percorre nel cadere piedi di Parigi 15: 1: $2\frac{1}{18}$ in un secondo di tempo, si moltiplichi questo spazio, che nel cadere percorre un grave in un secondo nel ritrovato quadrato, ed il prodotto darà l'altezza cercata. Ora la metà del dato tempo essendo 59, il suo quadrato per mezzo de' logaritmi si troverà così.

1. 770852	logaritmo di 59
2	Esponente della potestà cercata

Prodotto 3. 541704, a cui corrisponde il numero 3481, che è il cercato quadrato di 59. Si moltiplichi adesso questo 3481 per 14: 1: $2\frac{1}{18}$, e si avrà

Piedi	15: 1: $2\frac{1}{18}$
Numero quadrato	3481
Primo quoz.	$193\frac{7}{18}$
Prod. di 2 in 3481.	6962
Somma	$7155\frac{7}{18}$

Divisione

$$18 \,|\, 3481$$

Quoz.	$193\frac{7}{18}$
	18
	168
	162
	61
	54
Residuo	7

Divisione

$$12 \,|\, 7155\tfrac{7}{18}$$

Quoziente	596: $3\frac{7}{18}$
Prod. di 1 in 3481.	3481
Somma	4077: $3\frac{7}{18}$

Divisione

$$12 \,|\, 4077: 3\tfrac{7}{18}$$

Quoz.	339: $3\frac{7}{8}$
Prod. di 15 in 3481	52215
Somma	52554: 9: $3\frac{7}{18}$, che è

il

il prodotto cercato, e però l'altezza, a cui si è innalzata la Bomba, è di piedi 52554, pollici 9, linee 3 $\frac{7}{18}$.

1201. Prob. 11. Per mezzo de' logaritmi si debba levare da un dato numero una qualsivoglia radice.

1202. Si prenda il logaritmo del numero dato, quale si divida per quel numero, che determina la radice, e il numero, che corrisponderà a questo quoziente sarà la cercata radice.

La Dim. costa dal num. 1126.

ESEMPIO.

1203. Prob. 12. Data l'altezza, da cui cade un grave, o vogliamo dire lo spazio percorso, che sia di piedi 144, e dato il peso di questo grave, che sia di 7 libbre, debbasi determinare il suo momento, o sia il colpo, ch'egli cagionerà.

1204. Risol. Poichè il momento di un Grave secondo i Cartesiani è il prodotto della massa, o sia del peso nella velocità, e le velocità sono in ragione sudduplicata degli spazii percorsi, si prenda la radice quadrata dello spazio percorso, quale si moltiplichi nella massa, e il prodotto darà il momento cercato. La radice quadrata poi di 144 si troverà per mezzo de' logaritmi così.

	2. 158362	logaritmo di 144
	2	numero esprimente la radice cercata.
Quoziente	1. 079181	logaritmo di 12 radice quadrata di 144, e però

il momento cercato sarà $12 \times 7 = 84$.

1205. Prob. 13. Date tre quantità, si debba trovare la quarta, a cui stia la terza, come la prima sta alla seconda.

1206. Risol. Si sommi il logaritmo della terza quantità col logaritmo della seconda, e da questa somma si sottri il logaritmo della prima, e il numero, che corrisponderà al logaritmo residuo, sarà la quarta quantità cercata.

ESEMPIO.

1207. Prob. 14. Dato il 6 pel frutto, che corrisponde ad ogni 100, e dato il frutto, che da un capitale si ricava ogni anno, come 57, si debba determinare quale sia questo Capitale

1208. Risol. Poichè sta 6 : 100 :: 57 : al Capitale, si faccia

	2. 0000000	logaritmo di 100
	1. 7558748	logaritmo di 57
	0. 7781512	logaritmo di 6
Residuo	2. 9777236	logaritmo di 950 Capitale cercato.

1209. Prob. 15. Dato il numero di più termini continuamente proporzionali, data la loro ragione, e dato il minimo termine, che non sia l'unità, trovarne il mas-

massimo; o sia di una progressione geometrica dato il primo termine, che non sia l'unità, dato il numero de' termini, e il denominatore si debba ritrovare il massimo.

1210. Risol. Si moltiplichi nel dato numero de' termini il logaritmo della data ragione o sia del dato denominatore, e a questo prodotto si aggiunga il logaritmo del minimo termine, e ciò, che ne verrà, sarà il logaritmo del massimo termine cercato. La dim. costa dal num. 1052.

ESEMPIO.

1211. Prob. 16. Dato il capitale di lire 3864, il di cui frutto annuo sia il 5 per 100, cercasi a quanto monterà l'aumento del Capitale nel tempo di 9 anni, posto che il frutto entri in capitale, e faccia frutto.

1212. Risol. Poichè ogni cento di capitale acquista 5 di frutto, così starà 100 a 105, come il Capitale all'aggregato del Capitale, e del frutto, e istessamente pure in proporzione continua staranno tutti i susseguenti aggregati del Capitale sempre accresciuto, e del frutto: Per lo che si troverà questo aggregato per l'anno nono così. Si prendano i logaritmi dei due termini 100, 105 della ragione proposta, la di cui differenza si moltiplichi in 9 numero de' proposti anni, indi il prodotto si sommi col logaritmo del Capitale, e ciò, che ne risulterà, sarà il logaritmo dell'aggregato del Capitale, e del frutto corrispondente al tempo stabilito.

	2. 0211893	logaritmo di 105
	2. 0000000	logaritmo di 100
	0. 0211893	differenza de' logaritmi
	9	numero de' proposti anni, che moltiplica.
Prodotto	0. 1907037	
	3. 5870371	logaritmo del Capitale 3864
Somma	3. 7777408	logaritmo di $5994 \frac{241}{725}$

e però col Capitale 3864 al 5 per 100 coll'aggregarsi continuamente il frutto al Capitale nel tempo di 9 anni si viene a formare un Capitale di lire $5994 \frac{241}{725}$

1213. Che se il tempo proposto contenesse anni, mesi, e giorni, come cercandosi a quanto monterà l'aumento del precedente capitale 3864 nel termine di anni 7, mesi 5, giorni 18, dei logaritmi dei due termini 100, 105 della ragione data si prenda la differenza, che dicesi annua, quale divisa in dodici parti lascierà di quoziente la differenza mensile, indi la stessa differenza annua si divida per 365, e si avrà di quoziente la differenza diurna. Si moltiplichi poi ciascuna di queste differenze nel suo corrispondente numero, cioè la differenza annua in 7 numero degli anni proposti, la differenza mensile in 5 numero de' mesi, e la differenza diurna in 18 numero de' giorni, indi si aggiunga al logaritmo del Capitale la somma di questi prodotti, e ciò che ne risulta sarà il logaritmo dell'aggregato del Capitale, e del frutto corrispondente al tempo stabilito. 2.

	2. 0211893	logaritmo di 105
	2. 0000000	logaritmo di 100
Residuo	0. 0211893	differenza annua
	0. 0017658	differenza mensile
	0. 0000580	differenza diurna
0. 0211893 × 7 =	0. 1483251	differenza corrispondente a 7 anni
0. 0017658 × 5 =	0. 0088290	differenza corrispondente a 5 mesi
0. 0000580 × 18 =	0. 0010440	differenza corrispondente a 18 giorni
	0. 1581981	Somma de' precedenti prodotti
	3. 5870371	logaritmo del Capitale 3864

Somma 3. 7452352 logaritmo dell'aggregato del Capitale, e del frutto pel tempo cercato corrispondente a 5562. 05128, cui è montato il capitale 3864 al 5 per 100 mediante l'aggregazione continuamente del frutto al Capitale nel tempo di anni 7, mesi 5, giorni 18.

1214. Quando poi il primo termine della progressione sia l'unità, si dovrà moltiplicare il logaritmo della ragione, o sia del denominatore pel numero de' termini diminuito di una unità.

1215. Prob. 17. Di più termini continui proporzionali, o sia di una Progressione geometrica dato il massimo, e il minimo termine, e il numero de' termini si debba ritrovare il denominatore, o sia la ragione de' detti termini proporzionali.

1216. Risol. Dal logaritmo del massimo termine si sottri il logaritmo del minimo termine, e il residuo diviso pel numero de' termini darà un quoziente, che sarà il logaritmo della cercata ragione.

1217. La Dim. costa dal num. 1053.

ESEMPIO.

1218. Prob 18. Dato il Capitale, e il lucro corrispondente a quanti anni si vogliono, cercasi la ragione, che ha il Capitale al frutto di un'anno.

1219. Risol. Il dato Capitale sia di lire 5748, e il lucro corrispondente al nono anno sia 2252, così che in capo a 9 anni l'aggregato del frutto, e del Capitale sia 8000. Dal logaritmo di questo aggregato 8000 si sottri il logaritmo del Capitale 5748, e il residuo diviso per 9 numero degli anni proposti darà di quoziente il logaritmo della ragione, che aggiunto al logaritmo del Capitale darà il logaritmo del Capitale accresciuto del frutto di un'anno.

	3. 9030900	logaritmo di 8000
	3. 7595168	logaritmo di 5748
Divisore 9	0. 1435732	Residuo
	0. 0159525	logaritmo della ragione
	3. 7595168	logaritmo del Capitale 5748

Somma 3. 7754693 logaritmo del Capitale accresciuto del frutto di un'anno, a cui corrisponde 5963 $\frac{618}{1000}$, e però il Capitale acquista di frutto in un'anno lire 215 $\frac{618}{1000}$. Che però se il ritrovato logaritmo della ragione si aggiungerà al logaritmo di 100, si avrà l'aggregato di 100, e del suo frutto.

2. 0000000	logaritmo di 100
0. 0159525	logaritmo della ragione

Somma 2. 0159525 logaritmo dell'aggregato di 100, e del suo frutto, cui corrisponde 103 $\frac{742332}{1000000}$: Onde il frutto annuo per ogni 100 è 3 $\frac{742332}{1000000}$

1220. Che se si volesse sapere quanto di frutto gli corrisponde al mese, si divida il logaritmo trovato della ragione per 12 numero de' mesi, che formano l'anno, e il quoziente si sommi col logaritmo del Capitale, e ciò, che ne verrà, sarà il logaritmo del Capitale accresciuto del frutto corrispondente ad un mese.

	logaritmo della ragione	
Divis. 12	0. 0159525	
	0. 0013294	quoziente
	3. 7595168	logaritmo del Capitale 5748

Somma 3. 7608462 logaritmo del Capitale accresciuto del suo frutto al fine del primo mese, cui corrisponde 5765 $\frac{16}{100}$. Se pertanto al logaritmo di 100 si aggiungerà il ritrovato quoziente 0. 0013294, si avrà il logaritmo dell'aggregato di 100, e del suo frutto

2. 0000000	logaritmo di 100
0. 0013294	

Somma 2. 0013294 logaritmo dell'aggregato di 100, e del suo frutto, cui corrisponde 100 $\frac{3076341}{10000000}$, e però ad ogni 100 corrisponde $\frac{3076341}{10000000}$ di frutto al Mese.

1221.

1221. Se in oltre si volesse sapere quanto di frutto corrisponde ad un giorno si divida il ritrovato logaritmo della ragione per 365 numero de' giorni, che formano l'anno, e il quoziente si sommi col logaritmo del Capitale, e ciò, che ne verrà, sarà il logaritmo del Capitale accresciuto del frutto corrispondente a un giorno

		logaritmo della ragione
Divis. 365		0. 0159525
	0. 0000437	quoziente
	3. 7595168	logaritmo del Capitale 5748

Somma 3. 7595605 logaritmo del Capitale accresciuto del frutto corrispondente a un giorno, cui conviene 5748. 284768. Se pertanto al logaritmo di 100 si aggiungerà il ritrovato quoziente 437, si avrà il logaritmo dell' aggregato di 100, e del suo frutto corrispondente a un giorno.

2. 0000000	logaritmo di 1000
437	

Somma 2. 0000437 logaritmo corrispondente all'aggregato di 100, e del suo frutto diurno, cui conviene 100. 00995, è però il frutto diurno per ogni 100 è $\frac{995}{100000}$

1222. Prob. 19. Data la ragione, o sia il denominatore, dato il massimo termine, e il numero de' termini, si debba ritrovare il minimo termine.

1223. Risol. Dal logaritmo del massimo termine si sottri il prodotto, che nasce dal moltiplicarsi il logaritmo della ragione nel numero de' termini, e ciò che rimane sarà il logaritmo del minimo termine.

ESEMPIO.

1224. Prob. 20. Dato il tempo, come 8 anni, data la ragione del frutto, che corrisponde ad ogni 100, e sia il 5 per 100, e data la somma del Capitale, e del lucro corrispondente ai suddetti 8 anni, che sia 9000, cercasi il Capitale.

1225. Risol. Dal logaritmo dell' aggregato del Capitale, e del lucro si sottri il prodotto, che nasce dal moltiplicarsi la differenza dei logaritmi di 100, e 105, o sia il logaritmo della ragione in 8 numero degli anni proposti, e ciò, che rimane, sarà il logaritmo del Capitale cercato.

	2. 0211893	logar. di 105.
	2. 0000000	logar. di 100
Residuo	0. 0211893	logarit. della ragione
	8	numero degli anni proposti
	0. 1695144	Prodotto

0. 9542425	logar. di 9000
1695144	Prodotto
3. 7847281	Refiduo corrifpondente a 6091 $\frac{395}{713}$, che è

il Capitale cercato.

1226 Prob. 21. Data la ragione, o fia il denominatore, dato il maffimo, e il minimo termine fi debba ritrovare il numero de' termini.

1227. Rifol. Dal logaritmo del maffimo termine fi fottri il logaritmo del minimo, e il refiduo fi divida pel logaritmo della ragione, e il quoziente farà il cercato numero de' termini.

ESEMPIO.

1228. Prob. 22. Dato il Capitale, data la ragione, che ha ogni cento di Capitale al frutto, e dato l'aggregato del lucro, e del Capitale, cercafi il numero degli anni, in cui il Capitale ha fatto un tale aumento.

1229. Rifol. Dal logaritmo dell' aggregato del lucro, e del Capitale, che fia per Efempio 8126 fi fottri il logaritmo del Capitale 5500, e il refiduo fi divida pel logaritmo della ragione, cioè a dire per la differenza de' logaritmi di 100, e 105 termini della data ragione, e il quoziente farà il ricercato numero degli anni.

3. 9098769	logarit. di 8126
3. 7403624	logarit. del Capitale 5500
0. 1695144	Refiduo

	2. 0211893	logarit. di 105
	2. 0000000	logarit. di 100
Differenza	0. 0211893	logarit. della ragione

logarit. della ragione	Refiduo
211893	1695144

8 Quoziente, che è il numero degli anni cercati.

1230. Ometto molte altre operazioni circa le progreffioni, le quali fi poffono rendere più facili col mezzo de' logaritmi.

1231. Prob. 23. Date due quantità, e il numero di quanti medj proporzionali fra loro fi vogliono, debbanfi ritrovare i fuddetti medj proporzionali, o qual di loro più piace.

1232. Rifol. Si prendano i logaritmi delle due propofte quantità, e fi fottri il minore dal maggiore, onde averne la differenza, quale dividafi in tante parti, quan-

quante vengono indicate dal numero de' medj proporzionali cercati accresciuto di una unità: Per lo che se una di queste parti eguali si moltiplicherà pel numero, che indica la distanza del cercato medio proporzionale dalla prima delle date quantità, indi si aggiunga questo prodotto al logaritmo della prima quantità data, si avrà il logaritmo del medio proporzionale cercato. Che se poi il detto prodotto si sottrerà dal logaritmo della stessa prima quantità, il residuo sarà il logaritmo di un numero in proporzione tanto distante dalla prima quantità data, quanto lo indica il numero, con cui si moltiplicò la presa parte della differenza de' logaritmi delle proposte due quantità.

Per Esempio si debbano ritrovare cinque medj proporzionali fra queste due quantità 15625, 729. Si sottri il logaritmo di 729 dal logaritmo di 15625, e la differenza si divida per 6 numero de' cercati medj proporzionali accresciuto di una unità, e questo quoziente lo chiamo D. Fatto ciò si potrà ritrovare nel modo detto, o tutti, o qual più piaccia de' detti cinque medj proporzionali: Come volendosi il quarto, si moltiplichi il D per 4, e il prodotto E si aggiunga al B, e si avrà B + E, a cui corrisponde 5625, che è il quarto termine proporzionale cercato dopo il 729

C.	4. 1938200	logarit. di 15625
B.	2. 8627275	logarit. di 729
A.	1. 3310925	differenza
D.	0. 2218487	Quoz. nato dalla divisione per 6
E.	0. 8873948	Prodotto di D in 4, cui corrisponde
B + E.	3. 7501225	cui corrisponde 5625
B − E.	1. 9753325	cui corrisponde $64\frac{4784}{10000}$
C + E.	5. 0812150	cui corrisponde $120563\frac{22}{81}$
C − E.	3. 3064250	cui corrisponde 2025

In questo calcolo evvi il quarto termine proporzionale al di sopra, e al di sotto tanto della quantità B, come della quantità C, cioè tanto di 729, come di 15625.

1233. Prima di finire questo articolo una cosa bisogna osservare circa la somma e la sottrazione de' logaritmi difettivi, ed è che qualora debbasi sommare un logaritmo difettivo con un logaritmo positivo, lo che succede quando si deve moltiplicare una frazione con un intero, tale somma passerà in sottrazione a motivo del segno negativo − da cui è affetto il logaritmo diffettivo, come costa dal num. 946, e il residuo sarà il logaritmo del ricercato prodotto: Come dovendosi moltiplicare 60 per $\frac{1}{4}$, si farà

	1. 778151	logarit. di 60
	−0. 602060	logarit. di $\frac{1}{4}$
Residuo	1. 176091	logarit. di 15, che è appunto il prodotto di 60 in $\frac{1}{4}$

1234. Se poi si vorrà il prodotto di due frazioni, farà mestieri prendere la somma de' loro logaritmi difettivi, e tale somma sarà un logaritmo difettivo, a cui corrisponderà il ricercato prodotto: Come dovendosi moltiplicare $\frac{3}{4}$ in $\frac{2}{9}$, si farà

	−0. 124939	logarit. di $\frac{3}{4}$
	−0. 653212	logarit. di $\frac{2}{9}$
Somma	−0. 778151	logarit. di $\frac{1}{6}$, che è appunto il prodotto di $\frac{3}{4}$ in $\frac{2}{9}$

1235. Che se si vorrà dividere un intero per una frazione, bisognerà sommare il logaritmo difettivo della frazione col logaritmo dell' intero; e però quando si tratta di sottrarre un logaritmo difettivo da un logaritmo positivo, la sottrazione passa in somma, come costa dal num. 951., e la somma di questi due logaritmi sarà il logaritmo del ricercato quoziente: Come dovendosi dividere 18 per $\frac{1}{3}$, si farà

	1. 2552725	logarit. di 18
	−0. 4771213	logarit. di $\frac{1}{3}$
Somma	1. 7323938	logarit. di 54, che è appunto il quoziente, che nasce dal dividersi 18. per $\frac{1}{3}$

1236. Istessamente dovendosi dividere una frazione per un' altra, il logaritmo della frazione, che divide, da difettivo passerà ad essere positivo, e il logaritmo del quoziente sarà la differenza di questi due logaritmi; Come dovendosi dividere $\frac{4}{7}$ per $\frac{1}{14}$, si farà

1.

1. 1461280	logarit. di $\frac{1}{14}$
—0. 2430380	logarit. di $\frac{4}{7}$

Differenza 0. 9030900 logarit. di 8, che è appunto il quoziente nato dal dividersi $\frac{4}{7}$ per $\frac{1}{14}$.

1237. Finalmente se si dovrà dividere una frazione per un'intero, in tal caso il logaritmo del quoziente sarà un logaritmo difettivo, che risulterà dalla somma del logaritmo dell' intero, e della frazione: Come dovendosi dividere $\frac{1}{5}$ per 9, si farà

—0. 9542425	logarit. di 9
—0. 6989700	logarit. di $\frac{1}{5}$

Somma —1. 6532125 logarit. di $\frac{1}{45}$, che è appunto il quoziente nato dal dividersi $\frac{1}{5}$ per 9. E intanto al logaritmo di 9 si è prefisso il segno —, perchè nella frazione egli passa in denominatore col fare l'attuale divisione.

ARTICOLO IV.

Modo di evitare i Logaritmi negativi.

1238. Essendo che i logaritmi negativi, o difettivi, sono d'imbarazzo nel calcolo a motivo delle necessarie operazioni per determinarne le corrispondenti frazioni, però si è pensato al modo di schivare questi logaritmi difettivi per mezzo di un nuovo sistema di logaritmi, i quali non differiscono dai logaritmi volgari, se non dall'avere la Caratteristica aumentata di 10, lo che fa, che si trasporti più indietro il limite fra i logaritmi positivi, e difettivi, e che le frazioni comuni si cambino in frazioni decimali, i di cui numeratori vengono determinati dalla corrispondenza di logaritmi positivi.

1239. Già si è detto al num. 1133, che il principio della progressione aritmetica è arbitrario, cioè si può fare corrispondere all' unità della progressione geometrica qual termine più piaccia della progressione aritmetica; per lo che coll' aggiungere il 10 alla Caratteristica dei logaritmi volgari, si farà corrispondere il 10 all' unità nella progressione geometrica, laddove gli corrispondeva il zero; e siccome l' aggiunta di un termine costante (come è il 10 nel presente caso) a tutti i termini di una progressione aritmetica non ne altera nè la natura, nè la ragione comune, questi nuovi logaritmi non differiranno in altro dai logaritmi volgari, che nell' accennato aumento fatto nella Caratteristica.

1240. I nuovi logaritmi da tale aumento provenienti io li chiamerò, a distinzione de' volgari, logaritmi arbitrarj.

1241.

1241. Per mettere la cosa sotto agli occhi porrò quì in confronto i logaritmi volgari, e i logaritmi arbitrarj coi loro corrispondenti numeri assoluti.

Numeri assoluti.	Logar. volgari.	Logar. arbitrarj.
1000000000	9. 0000000	19. 0000000
100000000	8. 0000000	18. 0000000
10000000	7. 0000000	17. 0000000
1000000	6. 0000000	16. 0000000
100000	5. 0000000	15. 0000000
10000	4. 0000000	14. 0000000
1000	3. 0000000	13. 0000000
100	2. 0000000	12. 0000000
10	1. 0000000	11. 0000000
1	0. 0000000	10. 0000000
0. 1	− 1. 0000000	9. 0000000
0. 01	− 2. 0000000	8. 0000000
0. 001	− 3. 0000000	7. 0000000
0. 0001	− 4. 0000000	6. 0000000
0. 00001	− 5. 0000000	5. 0000000
0. 000001	− 6. 0000000	4. 0000000
0. 0000001	− 7. 0000000	3. 0000000
0. 00000001	− 8. 0000000	2. 0000000
0. 000000001	− 9. 0000000	1. 0000000
0. 0000000001	− 10. 0000000	0. 0000000
0. 00000000001	− 11. 0000000	− 1. 0000000

1242. Chiamerò Mantissa la frazione decimale, che va appresso alla Caratteristica come *9684829* è la Mantissa del logaritmo 1. *9684829*. Dappoichè i logaritmi volgari non differendo dagli arbitrarj, che nella Caratteristica, tanto degli uni, come degli altri la Mantissa sarà la medesima, come si può vedere tanto nella precedente Tavola, come nella seguente, dove pongo gli uni, e gli altri logaritmi, acciò si veda, che allo stesso numero, o egli sia un' intero, o sia il numeratore di una frazione decimale, corrisponde la stessa Mantissa.

Numeri

Numeri assoluti.	Logar. volgari.	Numeri assoluti.	Logarit. arbitrarj.
9.	0. 9542425		
8.	0. 9030900		
7.	0. 8450980		
6.	0. 7781513		
5.	0. 6989700		
4.	0. 6020600		
3.	0. 4771213		
2.	0. 3010300		
1.	0. 0000000		
		0. 9	9. 9542425
		0. 8	9. 9030900
		0. 7	9. 8450980
		0. 6	9. 7781513
		0. 5	9. 6989700
		0. 4	9. 6020600
		0. 3	9. 4771213
		0. 2	9. 3010300
		0. 1	9. 0000000

1243. Per poco, che si rifletta alla Tavola del num. 1241 si potrà facilmente osservare, che tutti i logaritmi volgari difettivi da $-$ 1. 0000000 fino a $-$ 10. 0000000, che corrispondono a frazioni comuni, si sono cambiati in logaritmi arbitrarii positivi, che corrispondono a frazioni decimali; e però a tutte le frazioni decimali (a cui pel num. 330. si possono ridurre le frazioni comuni), che non hanno il denominatore maggiore di 1000000000, che è il logaritmo arbitrario corrispondente all'unità, conviene un logaritmo positivo. In secondo luogo, che dalla sola ispezione della caratteristica del logaritmo arbitrario si raccoglie tanto il numero delle figure, che convengono all'intero corrispondente al logaritmo arbitrario, come il numero de' zeri, che nelle frazioni decimali corrispondenti al logaritmo arbitrario, debbono venire immediatamente dopo il punto divisorio; mentre la differenza, che passa tra il 9, e la caratteristica maggiore di 9 del proposto logaritmo arbitrario determina il numero delle figure, di cui deve costare l'intero; e se la caratteristica del dato logaritmo arbitrario è minore del 9, la differenza tra tale caratteristica, e il 9 dà il numero de' zeri, che nella corrispondente frazione decimale devono venire dopo il punto divisorio: Come se il dato logaritmo arbitrario avesse per caratteristica il 15, perchè la differenza tra 15, e 9 è $15-9=6$, ciò vorrebbe dire, che l'intero, a cui (come costa dalla Tavola del num. 1241) corrisponde il proposto logaritmo arbitrario, deve risultare da sei figure: Così se il dato logaritmo arbitrario avesse il 6 per caratteristica, poichè la differenza tra 9, e 6 è $9-6=3$, ciò vorrebbe dire, che nella frazione decimale, la quale (come costa dalla Tavola del num. 1241) corrisponde al proposto logaritmo arbitrario, devono venire tre zeri immediatamente dopo il punto divisorio. Quanto poi agl' interi,

determinate le figure significative, che corrispondono a un logaritmo arbitrario, nel modo, che or ora si dirà, se il numero di queste figure è minore della differenza, che passa trà il 9, e la caratteristica di tale logaritmo arbitrario alle ritrovate figure significative devonsi aggiungere a destra tanti zeri, quanti sono necessarii, acciò ne risulti un numero di tante figure, quante ne indica l'accennata differenza. Le figure poi significative corrispondenti a un logaritmo arbitrario vengono determinate dalla Mantissa, poichè (pel num. 1242.) tanto dei logaritmi arbitrarii, come dei logaritmi volgari, le Mantisse sono le medesime; e però dato un logaritmo arbitrario si avranno le figure significative, che gli corrispondono, con prendere nelle Tavole dei logaritmi volgari il numero assoluto, che conviene alla sua Mantissa. Ma l'Esempio renderà palpabile l'esposta dottrina. Sia dato il logaritmo arbitrario 7. 6020600, quale, per le cose dette, sappiamo corrispondere a una frazione decimale, che deve avere immediatamente dopo il punto divisorio due zeri, perchè la differenza tra la caratteristica 7, e il 9 è 2. Cerco pertanto nelle Tavole de' logaritmi volgari la Mantissa 6020600, e trovo che vi corrisponde il 4; dunque conchiudo, che la frazione decimale corrispondente al dato logaritmo arbitrario 7. 6020600 è 0. 004. Parimente sia dato il logaritmo arbitrario 11. 857332, che per le cose dette sappiamo corrispondere a un intero, che deve costare di due figure, perchè la differenza tra la caratteristica 11, e il 9 è 2. Cerco pertanto nelle Tavole de' logaritmi volgari la Mantissa 857332, cui trovo corrispondere 72, e però conchiudo, che il numero conveniente al dato logaritmo arbitrario 11. 857332 è 72. Per ultimo sia dato il logaritmo arbitrario 12. 477121, il quale, come mostra la caratteristica, corrisponde a un numero intiero di tre figure. Cerco pertanto nelle Tavole de' logaritmi volgari la Mantissa 477121, cui trovo corrispondere il 3, e perchè vi mancano ancora due figure per compiere il numero indicato dalla caratteristica, però a questo 3 aggiungo due zeri, e sarà 300 il numero conveniente al proposto logaritmo arbitrario 12. 477121.

1244. Qualora il ritrovato numero delle figure intere fosse maggiore di quello, che viene indicato dalla caratteristica, in tal caso le figure di più si separino con un punto, e questo numero corrispondente al dato logaritmo arbitrario sarà composto d'interi, e di decimali.

1245. Per poter discernere nel calcolo i logaritmi arbitrarii dai logaritmi volgari bisogna marcarli con qualche segno; io pertanto userò di prefiggerci L. A., che vorrà dire logaritmo arbitrario; così L. A. 11. 857332.

1246. Def. Complemento logaritmico di un qualunque numero è la differenza del logaritmo di tale numero dal logaritmo dell'unità accresciuto di 10: Onde il complemento logaritmico di 47 è 10. 0000000 — 1. 6720979 = 8. 3279021. Questo complemento logaritmico lo additerò con prefiggerci C. L.

1247. Siccome poi il complemento logaritmico di un qualunque numero è la differenza del logaritmo di tale numero dal logaritmo dell'unità accresciuto di 10; così *vice versa* il logaritmo di un qualunque numero sarà eguale al logaritmo dell'unità accresciuto di 10 meno il suo complemento logaritmico: Onde rispetto al numero 47 sarà 1. 6720979 = 10. 0000000 — C. L. 8. 3279021.

1248. Ora veniamo al modo di assegnare a qualsivoglia quantità il suo conveniente logaritmo arbitrario. E quantunque il bisogno di questi logaritmi abbia luogo soltanto nelle frazioni, pure non tornerà male il parlarne di passaggio anche rispetto agl' interi.

1249.

1249 Prob. 1. Debbasi determinare il logaritmo arbitrario di una data quantità intera.

1250 Risol. Si prenda il logaritmo volgare della data quantità intera, indi alla caratteristica si aggiunga 10, e lo che ne viene farà il ricercato logaritmo arbitrario.

1251. La Dim. costa dal num. 1240.

1252. Per esempio volendosi il logaritmo arbitrario di 152, si farà 10 + 2. 181844 = 12. 181844.

1253. Prob. 2. Debbasi determinare il logaritmo arbitrario conveniente a una data frazione.

1254. Risol. Quantunque di diversa spezie possano essere le frazioni, poichè o la data frazione è una frazione comune, e questa può avere per numeratore una, o più unità; o pure la data frazione è una frazione decimale; o finalmente la frazione proposta risulta dall' unità, o da più unità divise per una frazione decimale, niente di meno io ridurrò tutti questi casi a una sola soluzione con ridurre qualsivoglia frazione (se lo porta il bisogno) sotto la forma dell' unità divisa per una quantità intera, quale frazione sia poi moltiplicata nella conveniente quantità. Gli Esempii per ciascun caso renderanno tutto evidente.

1255. Dovendosi pertanto prendere il logaritmo arbitrario di una frazione comune, che abbia l' unità per numeratore, basterà prendere il complemento logaritmico del denominatore.

Dim. Il logaritmo arbitrario di una quantità non è altro (pel num. 1240.), che il logaritmo comune di tale quantità accresciuto di 10 nella caratteristica: Ma (pel num. 1127.) il logaritmo di una frazione, che non esprime altro, che una divisione da farsi del numeratore pel denominatore, è la differenza de' logaritmi del numeratore, e del denominatore, e nel caso de' logaritmi arbitrarii il logaritmo del numeratore s' intende accresciuto di 10. dunque il logaritmo arbitrario di una data frazione comune, che abbia per numeratore l' unità, non è altro, che il complemento logaritmico del denominatore ; Lo che si doveva dimostrare.

1256. Si debba per Esempio determinare il logaritmo arbitrario della frazione $\frac{1}{16}$. Si prenda il suo complemento logaritmico così.

10. 0000000	logaritmo dell' unità accresciuto di 10
1. 2041200	logaritmo di 16

Residuo 8. 7958800 Complemento logaritmico di $\frac{1}{16}$, a cui corrisponde 0. 06250, perchè alla mantissa 7958800 corrisponde nelle Tavole comuni 6250, ma poichè a motivo della Caratteristica 8 dopo il punto divisorio deve venire un zero, però si ha 0. 06250 frazione decimale, che vale $\frac{1}{16}$

1257. Che se la proposta frazione si dovesse moltiplicare per qualche numero, come per 48, si avrà, mediante i logaritmi, questo prodotto con sommare il complemento logaritmico della frazione $\frac{1}{16}$ col logaritmo volgare di 48, e ciò, che ne viene, farà un logaritmo arbitrario, che darà il cercato prodotto. Ecco il Calcolo.

	8. 7958800	C. L. di $\frac{1}{16}$
	1. 6812413	logar. di 48
Somma	10. 4771213	L. A., a cui corrifponde il 3, di fatto il prodotto

di 48 in $\frac{1}{16}$ è 3.

1258. Ora da quefto precedente numero fi fcorge il metodo per determinare il logaritmo arbitrario conveniente a qualfivoglia frazione di qualunque fpezie ella fia. Si debba per efempio determinare il logaritmo arbitrario della frazione $\frac{3}{4}$, che riduco alla forma $3 \times \frac{1}{4}$. Si faccia così:

	10. 0000000	logaritmo arbitrario dell' unità
	0. 6020600	logaritmo di 4.
Refiduo	9. 3979400	C. L. di $\frac{1}{4}$
	0. 4771213	logaritmo di 3.
Somma	9. 8750613	L. A. di $3 \times \frac{1}{4}$, o fia di $\frac{3}{4}$, a cui corrifpon-

de 0. 75, di fatto $\frac{3}{4} = 0.75$.

1259. Cercafi in terzo luogo il logaritmo arbitrario della frazione decimale 0. 0543, che riduco alla forma $543 \times \frac{1}{10000}$, però fi operi così:

	10. 000000	logaritmo arbitrario dell'unità
	4. 000000	logaritmo di 10000
Refiduo	6. 000000	C. L. di $\frac{1}{10000}$
	2. 734800	logaritmo di 543
Somma	8. 734800	L. A. di $543 \times \frac{1}{10000}$, o fia di 0. 0543.

1260. In quarto luogo debbafi prendere il logaritmo arbitrario della frazione $\frac{1}{0,025}$, che riduco alla forma $1000 \times \frac{1}{25}$. Si operi così:

10

	10. 0000000	L. A. dell' unità
	1. 3979400	logaritmo di 25
Residuo	8. 6020600	C. L. di $\frac{1}{25}$
	3. 0000000	logaritmo di 1000
Somma	11. 6020600	L. A. di $1000 \times \frac{1}{25}$, o sia di $\frac{1}{0.025}$, a cui cor-

risponde 40, e di fatto $\frac{1}{0.025} = 40$.

1261. Debbasi per ultimo determinare il logaritmo arbitrario della frazione $\frac{78}{0.0013}$, che riduco alla forma $10000 \times 78 \times \frac{1}{13}$. Si operi così:

	10. 0000000	L. A. dell' unità
	1. 1139434	logaritmo di 13
Residuo	8. 8860566	C. L. di $\frac{1}{13}$
	1. 8920946	logaritmo di 78
	4. 0000000	logar. di 10000
Somma	14. 7781512	L. A. di $10000 \times 78 \times \frac{1}{13}$, o sia di $\frac{78}{0.0013}$, cui

corrisponde 60000, e di fatto $\frac{78}{0.0013} = 60000$.

1262. Lo stesso metodo ha luogo qualora trattisi di determinare il logaritmo arbitrario di un prodotto di più frazioni comunque esse siano, o comuni, o decimali, sennonchè dalla Caratteristica del ritrovato logaritmo arbitrario devesi levare tante volte il 10 quante sono le frazioni meno una, che concorrono a formare tale prodotto. Per Esempio debbasi determinare il logaritmo arbitrario della seguente espressione $\frac{45 \times 0.0250 \times 0.004 \times 275}{0.00025 \times 0.0160 \times 75}$, che riduco alla seguente forma

$$100000 \times 10000 \times 45 \times 250 \times 4 \times 275 \times \frac{1}{10000} \times \frac{1}{1000} \times \frac{1}{25} \times \frac{1}{160} \times \frac{1}{75}$$

Opero pertanto nella maniera quì avanti tenuta.

5. 000000	logaritmo di 100000
4. 000000	logaritmo di 10000
1. 653212	logaritmo di 45
2. 397940	logaritmo di 250
0. 602060	logaritmo di 4
2. 439333	logaritmo di 275
6. 000000	C. L. di $\frac{1}{10000}$
7. 000000	C. L. di $\frac{1}{1000}$
8. 602060	C. L. di $\frac{1}{25}$
7. 795880	C. L. di $\frac{1}{160}$
8. 124939	C. L. di $\frac{1}{75}$

Somma 53. 615424 logaritmo arbitrario della proposta espressione ogni qualvolta dalla sua caratteristica sia levato quattro volte il 10, cioè 40, perchè nella data espressione entrano cinque frazioni. Onde il cercato logaritmo arbitrario sarà 13. 615424. Cerco pertanto nelle Tavole de' logaritmi comuni la Mantissa 615424, e trovo, che vi corrisponde il numero 4125, e perchè, come mostra la caratteristica, il numero che gli corrisponde deve costare di quattro figure, sarà 4125 il numero corrispondente al ritrovato logaritmo arbitrario, e di fatto $\frac{45 \times 0.0250 \times 0.004 \times 275}{0.00025 \times 0.0160 \times 75} = 4125$.

1263. Che se l'espressione fosse $\frac{45 \times 0.0000250 \times 0.0000004 \times 275}{0.0025 \times 0.0160 \times 75}$, che io riduco alla seguente forma

$$10000 \times 10000 \times 45 \times 275 \times 250 \times \frac{1}{10000000} \times 4 \times \frac{1}{10000000} \times \frac{1}{25} \times \frac{1}{160} \times \frac{1}{75}$$

si operi come nel precedente Esempio, e si avrà

4. 000000	logaritmo di 10000
4. 000000	logaritmo di 10000
1. 653212	logaritmo di 45
2. 439333	logaritmo di 275
2. 397940	logaritmo di 250
3. 000000	C. L. di $\frac{1}{10000000}$
0. 602060	logaritmo di 4
3. 000000	C. L. di $\frac{1}{10000000}$
8. 602060	C. L. di $\frac{1}{25}$
7. 795880	C. L. di $\frac{1}{160}$
8. 124939	C. L. di $\frac{1}{75}$

Somma 45. 615424
40

Resta 5. 615424 logaritmo arbitrario della proposta espressione. E perchè nelle Tavole de'logaritmi comuni alla Mantissa 615424 corrisponde 4125, e la caratteristica 5 vuole, che dopo il punto divisorio vengano immediatamente quattro zeri, però sarà o. 00004125 il numero, che corrisponde al ritrovato logarit. arbitrario. Di fatto $0.00004125 = \frac{45 \times 0.0000250 \times 0.0000004 \times 275}{0.0025 \times 0.0160 \times 75}$.

1264. Intanto poi dalla caratteristica del ritrovato logaritmo arbitrario devesi sottrarre tante volte il 10, quante lo esprime il numero delle frazioni diminuito di una unità, perchè, come abbiamo fissato, il logaritmo arbitrario deve risultare dal logaritmo comune accresciuto nella caratteristica soltanto di 10, e coi complementi logaritmici convenienti alle frazioni si aggiunge tante volte il 10, quante sono le frazioni.

1265. Se col sottrarsi dalla caratteristica del ritrovato logaritmo arbitrario tante volte il 10, quante lo vuole il numero delle frazioni diminuito di una unità, restasse zero, in tal caso dopo il punto divisorio della corrispondente frazione decimale verranno nove zeri, come costa dalla Tavola del num. 1240.

1266. Che se dalla caratteristica del ritrovato logaritmo arbitrario non si potrà sottrarre tante volte il 10, quante lo esige il numero delle frazioni diminuito di una unità, avvegnachè questi risulti un numero maggiore, in tal caso si sottri quante decine si può, e quelle che non si potranno sottrarre indicheranno altrettanti zeri da aggiungersi dopo il punto divisorio oltre quelli, che saranno indicati dal residuo minore di 10 della caratterista. Per Esempio debbasi prendere il logaritmo arbitrario dell' espressione
$\frac{45 \times 0.000000250 \times 0.000004 \times 0.0000275}{0.25 \times 0.160 \times 75}$, che riduco alla seguente forma.

$$100 \times 1000 \times 45 \times 250 \times \frac{1}{1000000000} \times 4 \times \frac{1}{1000000} \times 275 \times \frac{1}{10000000} \times \frac{1}{25} \times$$
$$1$$

$\frac{1}{160} \times \frac{1}{75}$, indi opero al solito

2. 000000	logar. di 100
3. 000000	logar. di 1000
1. 653212	logar. di 45
2. 397940	logar. di 250
1. 000000	C.L. di $\frac{1}{1000000000}$
0. 602060	logar. di 4
4. 000000	C.L. di $\frac{1}{1000000}$
2. 439333	logar. di 275
3. 000000	C. L. di $\frac{1}{10000000}$
8. 602060	C.L. di $\frac{1}{25}$
7. 795880	C.L. di $\frac{1}{160}$
8. 124939	C.L. di $\frac{1}{75}$
Somma 44. 615.424	L. A.
— 50	

Residuo — 10 + 4. 615424. Perchè dalla caratteristica 44 non si può sottrarre il 50, si è sottratto il 40, ed è rimasta la caratteristica positiva 4, la quale significa, che dopo il punto divisorio nella corrispondente frazione decimale vi vogliono cinque zeri; e perchè in oltre è rimasto da sottrarsi 10, che perciò si è scritto avanti il 4 col segno negativo, ciò vuol dire, che devonsi di più aggiungere altri dieci zeri, onde dopo il punto divisorio vi vorranno quindeci zeri, e il numero corrispondente al ritrovato logaritmo arbitrario — 10 + 4. 615424 sarà 0. 0000000000000004125, che appunto è

$$= \frac{45 \times 0.\ 00000025 0 \times 0.\ 000004 \times 0.\ 0000275}{0.\ 25 \times 0.\ 160 \times 75}.$$

1267. Rimane ora a dirsi la maniera di determinare il logaritmo arbitrario di una qualunque potestà, o di una qualunque radice di una data frazione.

1268. Poichè, come si è detto di sopra, qualunque frazione si può ridurre a tale forma, che non vi sia se non l'unità divisa per qualche quantità, però basterà osservare le frazioni, che hanno per numeratore l'unità.

1269. Prob. 3. Si debba prendere il logaritmo arbitrario di una potestà qualunque di una data frazione.

1270. Risol. Poichè l'innalzare una frazione a una proposta potestà non è altro, che moltiplicare la data frazione in se stessa tante volte una meno, quante lo mostra l' esponente della cercata potestà; quindi il prendere il logaritmo arbitrario di una qualunque potestà di una data frazione, non sarà altro, che prendere il com-

complemento logaritmico (giacchè si suppone, che la frazione abbia per numeratore l'unità) tante volte, quante lo indica l'esponente di tale potestà diminuito di una unità: Onde ne nasce la regola generale: Si prenda il complemento logaritmico della data frazione, e questo si moltiplichi nell'esponente della potestà cercata, indi dalla caratteristica si sottri tante volte il 10 quante unità una meno sono nell'esponente di tale potestà, e ciò che ne verrà sarà il cercato logaritmo arbitrario.

1271. Si debba per Esempio determinare il logaritmo arbitrario di $\frac{4}{5}$, che riduco alla forma $4 \times \frac{1}{5}$. Si operi pertanto così per trovarne il L. A. della quarta potestà.

	10. 000000	L. A. dell'unità
	0. 698970	logar. di 5.
	9. 301030	C. L. di $\frac{1}{5}$
	4.	Esponente della quarta potestà.
	37. 204120	Prodotto
	−30	
Residuo	7. 204120	L. A di $\frac{1}{5}$ elevato alla quarta potestà.
	2. 408240	logar. della quarta potestà di 4
Somma.	9. 612360	L. A di $\frac{4}{5}$ elevato alla quarta potestà,

a cui corrisponde 0. 4096. Di fatto la quarta potestà di $\frac{4}{5}$ è = 0. 4096.

1272. Con metodo retrogrado devesi procedere qualora si tratti di prendere il logaritmo arbitrario di una qualunque radice di una proposta frazione.

1273. Prob. 4. Si debba prendere il logaritmo arbitrario di una qualsivoglia radice di una data frazione.

1274. Risol. Si prenda il complemento logaritmico della data frazione, alla di cui caratteristica si aggiunga tante volte il 10, quante unità una meno contiene il numero, che determina la cercata radice: Indi si dividano tanto la caratteristica, come la mantissa pel numero, che esprime tale radice, e ciò, che ne verrà sarà il ricercato logaritmo arbitrario.

1275. Cercasi per Esempio il logaritmo arbitrario della radice quadrato-quadrata, o sia della radice quarta della frazione 0. 4095, che riduco alla seguente forma $4096 \times \frac{1}{10000}$. Si operi così:

	10. 000000	L. A. dell' unità
	4. 000000	logaritmo di 10000
Residuo	6. 000000	
	30.	Il 10. moltiplicato in 3 da aggiungersi
Somma	36. 000000	
Espon. che divide		
4	36. 000000	
Quoziente	9. 000000	L. A. della radice quarta di $\frac{1}{10000}$, cui corrisponde o. 1
	903090	quarta parte del logaritmo di 4096
Somma	9. 903090	L. A. della radice quarta di o. 4096 cui corrisponde o. 8.

Di fatto la radice quarta di o. 4096 è o. 8.

Logaritmi da 1. *fino a* 100.

Numeri.	Logaritmi.	Numeri.	Logaritmi.	Numeri.	Logaritmi.
1.	0. 0000000.	35.	1. 5440680.	68.	1. 8325089.
2.	0. 3010300.	36.	1. 5563025.	69.	1. 8388491.
3.	0. 4771213.	37.	1. 5682017.	70.	1. 8450980.
4.	0. 6020600.	38.	1. 5797836.	71.	1. 8512583.
5.	0. 6989700.	39.	1. 5910646.	72.	1. 8573325.
6.	0. 7781513.	40.	1. 6020600.	73.	1. 8633229.
7.	0. 8450980.	41.	1. 6127839.	74.	1. 8602317.
8.	0. 9030900.	42.	1. 6232493.	75.	1. 8750613.
9.	0. 9542425.	43.	1. 6334685.	76.	1. 8808136.
10.	1. 0000000.	44.	1. 6434527.	77.	1. 8864907.
11.	1. 0413927.	45.	1. 6532125.	78.	1. 8920946.
12.	1. 0791812.	46.	1. 6627578.	79.	1. 8976271.
13.	1. 1139434.	47.	1. 6720979.	80.	1. 9030899.
14.	1. 1461280.	48.	1. 6812412.	81.	1. 9084850.
15.	1. 1760913.	49.	1. 6901961.	82.	1. 9138139.
16.	1. 2041200.	50.	1. 6989700.	83.	1. 9190781.
17.	1. 2304480.	51.	1. 7075702.	84.	1. 9242793.
18.	1. 2552725.	52.	1. 7160033.	85.	1. 9294189.
19.	1. 2787536.	53.	1. 7242759.	86.	1. 9344985.
20.	1. 3010300.	54.	1. 7323938.	87.	1. 9395193.
21.	1. 3222193.	55.	1. 7403627.	88.	1. 9444827.
22.	1. 3424227.	56.	1. 7481880.	89.	1. 9493900.
23.	1. 3617278.	57.	1. 7558749.	90.	1. 9542425.
24.	1. 3802112.	58.	1. 7634280.	91.	1. 9590414.
25.	1. 3979400.	59.	1. 7708520.	92.	1. 9637878.
26.	1. 4149733.	60.	1. 7781513.	93.	1. 9684829.
27.	1. 4313638.	61.	1. 7853298.	94.	1. 9731279.
28.	1. 4471580.	62.	1. 7923917.	95.	1. 9777236.
29.	1. 4623980.	63.	1. 7993405.	96.	1. 9822712.
30.	1. 4771213.	64.	1. 8061800.	97.	1. 9867717.
31.	1. 4913617.	65.	1. 8129134.	98.	1. 9912261.
32.	1. 5051500.	66.	1. 8195439.	99.	1. 9956352.
33.	1. 5185139.	67.	1. 8260748.	100.	2. 0000000.
34.	1. 5314789.				

CAPO VII.

De' Numeri figurati.

ARTICOLO I.

De' Numeri figurati Poligoni, e della loro genesi.

1276. Def. I. I numeri Poligoni sono quelli, che nascono dal continuo sommare altri numeri, i quali sono in progressione aritmetica principiante dall'unità. Dal diverso esponente poi della progressione Aritmetica nascono i seguenti diversi generi di Poligoni.

1277. Se l'esponente della progressione Aritmetica, dal di cui continuo raccorne i termini risultano i numeri poligoni, sarà l'unità, i poligoni generati, si diranno poligoni del primo genere, ovvero numeri triangolari. Si diranno poligoni del secondo genere, ovvero numeri quadrati, se l'esponente della progressione aritmetica sarà 2. Si diranno poligoni del terzo genere, ovvero numeri pentagoni, se l'esponente della progressione aritmetica sarà 3. Si diranno ec. come qui sotto si vede. I numeri poi della progressione aritmetica qualunque ella sia si chiamano numeri genitori, perchè da essi si generano i numeri poligoni. Ecco l'Esempio.

Prima progressione Aritmetica	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	numeri genitori
Numeri triangolari	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	
Seconda progressione Arit.	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	numeri genitori
Numeri quadrati	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	
Terza progressione Arit.	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	numeri genitori
Numeri pentagoni	1.	5.	12.	22.	35.	51.	70.	
Quarta progressione Arit.	1.	5.	9.	13.	17.	21.	25.	numeri genitori
Numeri Esagoni	1.	6.	15.	28.	45.	66.	91.	
Quinta progressione Arit.	1.	6.	11.	16.	21.	26.	31.	numeri genitori
Numeri Ettagoni	1.	7.	18.	34.	55.	81.	112.	
Sesta progressione Arit.	1.	7.	13.	19.	25.	31.	37.	numeri genitori
Numeri ottagoni.	1.	8.	21.	40.	65.	96.	133.	

1278. Collo stesso metodo si avranno gli altri poligoni de' generi superiori. Qui pertanto si vede, che il primo numero triangolare è 1; il secondo è $1 + 2 = 3$; il terzo è $1 + 2 + 3 = 6$; il quarto è $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ec. Così il primo numero quadrato è 1; il secondo è $1 + 3 = 4$; il terzo è $1 = 3 + 5 = 9$; il quarto è $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ ec. Istessamente il primo numero pentagono è 1; il secondo è è $1 + 4 = 5$; il terzo è $1 + 4 + 7 = 12$; il quarto è $1 + 4 + 7 + 10 = 22$ ec. ec.

1279.

1279. Def. 2. Lato di un numero poligono è il numero de' termini genitori della progressione aritmetica, dalla somma de' quali è nato tale numero poligono. Per Esempio del numero triangolare 10 il lato è 4, perchè egli risulta dalla somma di quattro termini della progressione aritmetica naturale.

1280. Def. 3. Il numero degli angoli è quel numero, che in ciascuna serie di poligoni viene immediatamente dopo l'unità; così de' numeri triangolari egli è 3; de' quadrati è 4; de' pentagoni è 5; degli esagoni è 6 ec.

1281. Corol. Quindi il numero degli angoli in ciascun genere de' numeri poligoni supera l'esponente de' numeri genitori della progressione aritmetica di due unità: E però essendo dato il numero degli angoli di un qualsivoglia genere di numeri poligoni, si avrà l'esponente della progressione aritmetica de' numeri genitori, con levare due unità al dato numero degli angoli, e il residuo sarà l'esponente cercato.

1282. Prob. Debbasi ritrovare un qualsivoglia numero poligono, di cui sia dato il lato, e il numero degli angoli.

1283. Risol. Poichè qui non altro trattasi, che trovare la somma (pel num. 1276.) di una progressione aritmetica, di cui sono noti il primo termine, l'esponente, e il numero de' termini, mentre il primo termine è l'unità, l'esponente è il dato numero degli angoli diminuito di due unità, e il numero de' termini è il lato proposto, però si trovi primieramente (pel num. 1014.) il massimo termine della progressione denominato dal lato dato con aggiugnere al minimo termine il prodotto dell'esponente nel lato diminuito di una unità; indi si sommi il ritrovato massimo termine col primo termine della progressione, che è 1, e questa somma si moltiplichi nel lato dato, e il prodotto diviso per 2 darà (pel num. 1023.) la somma de' numeri genitori del cercato poligono, e conseguentemente lo stesso poligono (pel num. 1276.)

1284. Per Esempio cercasi il numero pentagono, che per lato ha il 6. Essendo che si cerca un numero pentagono, il numero degli angoli sarà 5, e però l'esponente della progressione aritmetica de' numeri genitori sarà $5-2=3$. Si ha adunque il primo termine della progressione aritmetica generante, che è 1, l'esponente che è 3, il numero de' termini da sommarsi, che è 6: Onde la somma cercata, o sia il cercato poligono sarà $\frac{\overline{1+3\times\overline{6-1}+1}\times 6}{2} = \frac{\overline{1+3\times 5+1}\times 6}{2} = \frac{102}{2} = 51$.

1285. O pure più speditamente (giusta il num. 1024.) si troverà il cercato numero poligono con prendere il lato più la metà del prodotto dell'esponente nel quadrato del lato diminuito dello stesso lato. Come volendosi il numero ottagono, che ha per lato il 7, si farà $7+6\times\frac{7^2-7}{2} = 7+\frac{252}{2} = 7+126 = 133$

ARTICOLO II.

Dei numeri Piramidali, e della loro genesi.

1286. DEf. I numeri piramidali sono quelli, che nascono dal continuo raccorre i numeri poligoni.

1287.

1287. Per lo che i numeri figurati non ſolo ſi diſtinguono in varj generi (giuſta il num. 1277), ma eziandio i numeri ſteſſi di qualunque genere ſi dividono in varj ordini. Diſtinti pertanto i diverſi generi de' numeri figurati, quelli diranſi in qualſivoglia genere figurati del primo ordine, che naſcono dal raccorre i numeri genitori della progreſſione aritmetica: Figurati del ſecondo ordine ſi diranno quelli, che naſcono dalla ſomma de' figurati del primo ordine: Figurati del terzo ordine ſi chiameranno quelli, che naſcono dal continuo raccorre i figurati del ſecondo ordine, e così ſucceſſivamente. In iſpezie poi ſi dicono numeri piramidali triangolari primi, ſecondi, terzi ec. quelli, che riconoſceno la loro origine dai numeri triangolari: Si chiamano piramidali pentagoni primi, ſecondi, terzi ec. quelli, che naſcono dai numeri pentagoni ec.

1288. Ecco i diverſi generi de' numeri figurati coi loro riſpettivi ordini.

	Primo genere de' numeri triangolari.							
Ordine I. Piramidali primi.	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	Numeri triangolari.
Ordine II. Piramidali ſecondi.	1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.	
Ordine III. Piramidali terzi.	1.	5.	15.	35.	70.	126.	210.	
Ordine IV. Piramidali quarti.	1.	6.	21.	56.	126.	252.	462.	

	Secondo genere de' numeri quadrati.							
Ordine I. Piramidali primi.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	Numeri quadrati.
Ordine II. Piramidali ſecondi.	1.	5.	14.	30.	55.	91.	140.	
Ordine III. Piramidali terzi.	1.	6.	20.	50.	105.	196.	336.	
Ordine IV. Piramidali quarti.	1.	7.	27.	77.	182.	378.	714.	

	Terzo genere de' numeri pentagoni.							
Ordine I. Piramidali primi.	1.	5.	12.	22.	35.	51.	70.	Numeri pentagoni.
Ordine II. Piramidali ſecondi.	1.	6.	18.	40.	75.	126.	196.	
Ordine III. Piramidali terzi.	1.	7.	25.	65.	140.	266.	462.	
Ordine IV. Piramidali quarti.	1.	8.	33.	98.	238.	504.	966.	

1289. Con queſto metodo ſi poſſono ſuſſeguentemente continuare gli altri ordini in ciaſcuno de' propoſti generi; e de' ſeguenti generi eſibirne gli ordini.

1290. Poichè qualſivoglia ordine di figurati in ciaſcun genere riſulta dal continuo ſommare i termini dell' ordine precedente, ben ſi vede, che le differenze dei termini di qualſiſia ordine non ſono altro, che i termini dell' ordine precedente. Come pure le differenze dei termini di una qualunque colonna verticale comprendente tutti gli ordini di qualſivoglia genere non ſono altro, che i termini della precedente colonna verticale: Per Eſempio le differenze dei termini 25. 55. 105. 182. ec. della quinta colonna verticale del ſecondo genere non ſono altro, che i termini 30. 50. 77. ec. della ſua precedente colonna verticale.

ARTICOLO III.

Modo di ritrovare i numeri piramidali di qualſivoglia genere, dati eſſendo i piramidali del primo genere.

1291. IL metodo ha origine da alcune proprietà de' numeri figurati, che ſono le ſeguenti.

1292.

1292. Proprietà prima. Se ai figurati di un qualche ordine del primo genere si prefiggerà un zero, indi si moltiplichino ordinatamente pel numero, che esprime un qualsivoglia altro genere, poscia si sommino i risultati prodotti coi termini dell' ordine precedente nello stesso primo genere, si avranno i figurati dell' ordine medesimo de' figurati moltiplicati, ma del genere indicato dal numero, che li moltiplicò. Per esempio.

Figurati del terzo ordine nel primo genere.	0.	1.	5.	15.	35.	70.	126.
Numero esprimente il 4. genere, che moltiplica.	4.						
Prodotti.	0.	4.	20.	60.	140.	280.	504.
Figurati del secondo ordine nel primo genere.	1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.
Figurati del terzo ordine nel quarto genere.	1.	8.	30.	80.	175.	336.	588.

1293. Proprietà seconda. Se ai figurati di un qualche ordine del primo genere si prefiggerà un zero, indi si sommino coi figurati dello stesso ordine in qualsivoglia altro genere, ne risulteranno i figurati del medesimo ordine, ma del genere susseguente. Per esempio.

Figurati del primo ordine nel primo genere.	0.	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.
Figurati del primo ordine nel primo genere.	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.
Figurati del primo ordine nel secondo genere.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.

ALTRO ESEMPIO.

Genitori del primo genere.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Genitori del terzo genere.	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22.	25.
Genitori del quarto genere.	1	5.	9.	13.	17.	21.	25.	29.	33.

1294. Proprietà terza. Se ai figurati di qualsivoglia ordine del primo genere si prefiggerà un zero, indi si moltiplichino per un qualunque numero, e questi prodotti si sommino cogli stessi figurati dati, si avranno altri figurati dello stesso ordine, ma del genere indicato dal numero, che moltiplicò, accresciuto di una unità. Per esempio.

Figurati del secondo ordine nel primo genere.	0.	1.	4.	10.	20.	35.	56.
Numero, che moltiplica.	3.						
Prodotti.		3.	12.	30.	60.	105.	168.
	1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.
Figurati del secondo ordine nel genere 3 + 1	1.	7.	22.	50.	95.	161.	252.

1295. Ora per servirmi di quest' ultima proprietà, qualora si vogliano i figurati di qual più piaccia ordine in qualsivoglia genere, si prendano i figurati dello stesso ordine nel primo genere, e vi si prefigga un zero, poscia si moltiplichino pel numero del genere cercato diminuito di una unità, e i prodotti si sommino cogli stessi figu-

figurati, e ciò, che ne verrà, sarà l'ordine de' figurati nel genere cercato: Come se si volessero i figurati del secondo ordine nel quarto genere, si opererebbe come si è fatto nell' Esempio del num. 1294.

ARTICOLO IV.

Modo di sommare i Piramidali del primo genere.

1296. IL modo di determinare queste somme dipende dalle seguenti proprietà, che convengono a questi figurati del primo genere.

1297. Proprietà, che conviene ai numeri genitori del primo genere. Se ai genitori del primo genere si prefiggerà un zero, indi se ne raccolgano in una somma quanti si vogliono, tale somma sarà la metà della somma di altrettanti termini (computato però anche il zero per un termine), ognuno de' quali sia eguale al massimo de' termini dati. Per Esempio volendosi la somma de' seguenti termini 1. 2. 3. 4. 5. 6., si farà 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6., onde diventano sette termini, de' quali la somma 21. è la metà di sette termini, ognuno de' quali sia eguale al massimo 6., cioè $21 = \frac{6+6+6+6+6+6+6}{2} = \frac{42}{2} = 21$.

1298. Se adunque il dato numero de' termini da sommarsi, a' quali non sia prefisso il zero, si moltiplicherà nello stesso numero accresciuto di una unità, e il prodotto si divida per 2, il quoziente darà la somma de' termini proposti: E però nel caso dell'Esempio precedente, in cui si cercava la somma de' sei dati termini 1. 2. 3. 4. 5. 6., tale somma sarà $\frac{6 \times \overline{6+1}}{2} = \frac{42}{2} = 21$. Per lo che per avere la somma di quanti si vogliono genitori del primo genere, basta che sia dato il loro numero.

1299. Proprietà dei numeri piramidali del primo ordine nel primo genere. Se a questi numeri figurati si prefiggeranno due zeri, indi se ne raccolgano in una somma quanti si vogliono, tale somma sarà la terza parte della somma di altrettanti termini (computati però per termini anche i due zeri), ognuno de' quali sia eguale al massimo de' termini dati. Per Esempio volendosi la somma dei seguenti termini 1. 3. 6. 10. 15., si faccia 0. 0. 1. 3. 6. 10. 15. con che diventano sette termini, de' quali la somma 35 è la terza parte di sette termini, ognuno de' quali è eguale al massimo 15, cioè $35 = \frac{15+15+15+15+15+15+15}{3} = \frac{105}{3} = 35$. Onde per avere la somma di quanti si vogliono di questi figurati del primo ordine basta che sia dato il loro numero.

1300. Quindi ne' figurati del primo ordine nel primo genere se il dato numero de' termini da sommarsi accresciuto di due unità si moltiplicherà nel massimo termine corrispondente al dato numero de' termini (quale massimo termine rendesi noto dal num. 1298., e che nel caso presente di cinque termini è $\frac{5 \times \overline{5+1}}{2}$), indi il prodotto si divida per 3, il quoziente sarà la somma cercata, che sarà $\frac{5 \times \overline{5+1}}{2} \frac{\times \overline{5+2}}{3} = \frac{210}{6} = 35$.

ESEM-

ESEMPIO.

Prob. Cercasi il numero delle Palle da Cannone, che sono in una Pila, la di cui base costa di tre lati eguali, che dicesi base triangolare.

Risol. Poichè ciascuna palla di un qualunque piano superiore poggia tra le corrispondenti palle del piano inferiore, qualunque ordine superiore dalla stessa banda ha una palla di meno, che il prossimo ordine inferiore: Dal che ne viene, che nell'ultimo piano superiore v'è una sola palla, nel prossimo ve ne sono tre, nel susseguente ve ne sono sei, nell'altro contiguo ve ne sono 10, e così susseguentemente 15, 21, 28 ec., che sono i numeri triangolari, e tanti poi sono questi piani, quante palle contiene un lato della base, qualunque egli sia, poichè sono tutti tre eguali. Dunque per avere il numero delle palle, che sono in una di queste pile, basterà prendere la somma di tanti numeri triangolari, quante sono le palle in un lato della base: Come se un lato della base avesse 17 palle, il numero di tutte le palle della Pila sarà $17 \times \frac{\overline{17+1}}{2} \times \frac{\overline{17+2}}{3} = \frac{5814}{6} = 969$

1301. La proprietà de' numeri piramidali del secondo ordine nel primo genere è, che se gli si prefiggeranno tre zeri, indi se ne raccolgano in una somma quanti si vogliono, tale somma sarà la quarta parte della somma di altrettanti termini (computati per termini anche i tre zeri), ognuno de' quali sia eguale al massimo de' termini dati. Per Esempio volendosi la somma dei seguenti termini 1. 4. 10. 20. 35., si faccia 0. 0. 0. 1. 4. 10. 20. 35., con che diventano otto termini, de' quali la somma 70 è la quarta parte di otto termini, ognuno de' quali è eguale al massimo 35, vale a dire $70 = \frac{35+35+35+35+35+35+35+35}{4} = \frac{280}{4} = 70$

1302. Per lo che ne' figurati del secondo ordine nel primo genere, se il dato numero de' termini da sommarsi accresciuto di tre unità si moltiplicherà nel massimo termine corrispondente al dato numero de' termini (quale massimo termine si ha dal num. 1300, che nel presente caso di cinque termini è $5 \times \frac{\overline{5+1}}{2} \times \frac{\overline{5+2}}{3}$), indi il prodotto si divida per 4, il quoziente darà la somma cercata, che sarà $5 \times \frac{\overline{5+1}}{2} \times \frac{\overline{5+2}}{3} \times \frac{\overline{5+3}}{4} = \frac{1680}{24} = 70$. E però per avere la somma di quanti figurati si vogliono del secondo ordine, basta che sia dato il loro numero.

1303. Collo stesso ordine si proceda per determinare la somma dei figurati degli altri ordini: Onde per i figurati del terzo ordine, se il numero de' termini sarà per Esempio 4, la loro somma sarà $4 \times \frac{\overline{4+1}}{2} \times \frac{\overline{4+2}}{3} \times \frac{\overline{4+3}}{4} \times \frac{\overline{4+4}}{5} = \frac{6720}{120} = 56$. Per i figurati del quarto ordine se il numero de' termini da sommarsi sarà per Esempio 6, la loro somma sarà

$6 \times \frac{\overline{6+1}}{2} \times \frac{\overline{6+2}}{3} \times \frac{\overline{6+3}}{4} \times \frac{\overline{6+4}}{5} \times \frac{\overline{6+5}}{6} = \frac{332640}{720} = 462$ ec.

1304. Dai numeri pertanto 1297, 1299, 1301 si deduce la seguente regola generale. Se ai figurati del primo genere si prefiggeranno tanti zeri, quanti ne in-

dica il numero del proprio ordine accresciuto di una unità, cioè due ai figurati del primo ordine, tre ai figurati del secondo ordine, quattro ai figurati del terzo ordine ec., la somma di quanti termini più si vogliono starà alla somma di altrettanti termini, considerando però per termini anche i zeri, ognuno de' quali sia eguale al massimo de' termini dati, come sta l'unità al numero di quel tal ordine (di cui hansi a sommare i termini) accresciuto di due unità, cioè come 1 a 3 ne' figurati del primo ordine; come 1 a 4 ne' figurati del secondo ordine ec.

1305. Dai numeri poi 1298, 1300, 1302 hassi la seguente regola generale per determinare la somma di quanti, e quali si vogliono piramidali del primo genere, dato che sia il numero de' termini da sommarsi. La regola si è di fare due progressioni aritmetiche tutte due ascendenti con l'incremento di una unità, la prima delle quali deve cominciare dal dato numero di termini da sommarsi, e l'altra dall'unità; e l'una, e l'altra deve costare di tanti termini, quante unità contiene il numero, che indica l'ordine de' figurati da sommarsi accresciuto di due unità. Fatto questo si moltiplichino fra loro tutti i termini dell'una, e dell'altra progressione, indi il prodotto della prima si divida pel prodotto della seconda, e il quoziente darà la somma cercata. Si voglia per Esempio la somma di cinque termini de' figurati del terz' ordine: Poichè il numero de' termini è 5, e il numero del proposto ordine accresciuto di due unità è parimente 5, le due progressioni saranno

5. 6. 7. 8. 9.	Prodotto dei termini della prima progressione	15120
1. 2. 3. 4 5.	Prodotto dei termini della seconda progressione	120

e però $\frac{15120}{120} = 126$ somma cercata.

ARTICOLO V.

Modo di sommare i Piramidali dei seguenti generi superiori.

1306. PRob. Dato il numero de' Piramidali da sommarsi, dato il loro ordine, e il loro genere, se ne cerca la somma.

1307. Risol. Per le cose dette nel precedente articolo si trovi la somma di tanti piramidali dello stesso ordine nel primo genere, quanti ne indica il numero proposto diminuito di una unità, e questa somma si moltiplichi pel numero del genere proposto diminuito di una unità, e al prodotto si aggiunga la somma di tanti piramidali dello stesso ordine nel primo genere, quanti ne esprime il numero dato; e ciò, che ne verrà, sarà la somma cercata.

1308. Dim. Pel num. 1295. si hanno i numeri piramidali di qualunque ordine in qualsivoglia genere con prendere i piramidali dello stesso ordine nel primo genere, e prefiggerci un zero, indi moltiplicarli nel numero del genere cercato diminuito di una unità, e prendere poscia la somma per ordine de' risultati termini cogli stessi piramidali. Se pertanto si moltiplicherà la somma di tanti piramidali del primo genere, e dell' ordine proposto, quanti ne indica il dato numero di termini diminuito di una unità (lo che è lo stesso, che dire la somma di altrettanti termini aventi il zero in principio, quanti n' esprime il detto numero di termini) nel numero esprimente il genere de' piramidali da sommarsi diminuito di una unità, poscia al prodotto si aggiunga la somma di tanti piramidali dello stesso ordine nel primo ge-

ne-

nere, quanti ne mostra il numero de' termini da sommarsi, e ciò, che ne verrà, sarà la somma cercata. Lo che si doveva dimostrare.

1309. Debbasi per Esempio trovare la somma di sei piramidali del secondo ordine nel terzo genere.

Genere meno una unità. Som. di 5. term. del 2. Ord. nel pr. gen. Somma di sei

$$\overline{3-1}\times 5\times\frac{\overline{5+1}}{2.}\times\frac{\overline{5+2}}{3.}\times\frac{\overline{5+3}}{4} + 6\times\frac{\overline{6+1}}{2.}\times\frac{\overline{6+2}}{3.}\times\frac{\overline{6+3}}{4.} =$$

$2\times\frac{1680}{24}+\frac{3024}{24}=266$ Somma di sei piramidali del secondo ordine nel terzo genere.

Parimente si debba ritrovare la somma di otto piramidali del primo ordine nel secondo genere; si faccia

Num. del gen.

$$\overline{2-1}\times 7\times\frac{\overline{7+1}}{2.}\times\frac{\overline{7+2}}{3.}+8\times\frac{\overline{8+1}}{2.}\times\frac{\overline{8+2}}{3.}=1\times\frac{504}{6}+\frac{720}{6}=204.$$

Così per avere la somma di cinque piramidali del terz' ordine nel quarto genere, si farà

Num. del genere

$$\overline{4-1}\times4\times\frac{\overline{4+1}}{2.}\times\frac{\overline{4+2}}{3.}\times\frac{\overline{4+3}}{4.}\times\frac{\overline{4+4}}{5.}+5\times\frac{\overline{5+1}}{2.}\times\frac{\overline{5+2}}{3.}\times\frac{\overline{5+3}}{4.}\times\frac{\overline{5+4}}{5.}$$

$$=3\times\frac{6720}{120}+\frac{15120}{120}=294.$$

ESEMPIO.

Prob. Cercasi il numero delle Palle da Cannone, che sono in una Pila, la di cui base costa di quattro lati eguali, che però dicesi base quadrata.

Risol. Si osservi, che in qualunque piano formato da queste palle il suo lato ha una palla di meno, che il lato del prossimo piano inferiore mediante che l'ultimo piano superiore contiene una sola palla, il prossimo inferiore ne contiene 4; il susseguente 9, e così in poi 16, 25, 36 ec., che sono i Piramidali primi del secondo genere: Il numero poi de' piani è il numero stesso delle palle contenute in un lato della base: Per lo che per avere il numero delle palle, che sono in una di queste Pile, bisogna prendere la somma di tanti numeri piramidali primi del secondo genere, quanti ne determina il numero delle palle, che sono nel lato della base: Come se un lato della base avrà 13 palle, il numero di tutte le palle della pila sarà $12\times\frac{\overline{12+1}}{2.}\times\frac{\overline{12+2}}{3.}+13\times\frac{\overline{13+1}}{2.}\times\frac{\overline{13+2}}{3.}=\frac{2184}{6}+\frac{2730}{6}=364+455=819.$

SCOLIO.

1310. Nel precedente Articolo IV. si sono bensì considerate le serie de' figurati degradate, cioè coi zeri in principio così

I.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
II.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
III.	0.	0.	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.
IV.	0.	0.	0.	1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.
V.	0.	0.	0.	0.	1.	5.	15.	35.	70.	126.
VI.	0.	0.	0.	0.	0.	1.	6.	21.	56.	126. ec.
VII.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	1.	7.	28.	84.
VIII.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	1.	8.	36.
IX.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	1.	9.
X.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	1.
	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.

Ma poi nel prendere la ſomma di un certo numero di termini, fra queſti termini non ſi ſono computati i zeri convenienti al principio della ſerie relativamente al ſuo ordine: Che però ſe nel numero de' propoſti termini da ſommarſi s' intenderanno compreſi anche i zeri, ben ſi vede, che eſſendo propoſti per Eſempio otto termini della ſerie I. da ſommarſi, eſſi ſaranno 8 – 1 nella ſerie II., perchè ella ha un zero in principio; ſaranno 8 – 2 nella ſerie III., che ha due zeri in principio; ſaranno 8 – 3 nella ſerie IV.; ſaranno 8 – 4 nella ſerie V. ec. E però il numero de' termini facendoſi minore di una unità nella ſerie de' numeri genitori, minore di due unità ne' piramidali del primo ordine, minore di tre unità ne' piramidali del ſecondo ordine ec., ſe ſi dovrà per Eſempio prendere la ſomma di cinque termini, per la ſerie I., tale ſomma ſarà 5: Per la ſerie II. de' genitori tale ſomma ſarà $\frac{5 \times \overline{5-2}}{2.}$. Per la ſerie III. de' piramidali del primo ordine queſta ſomma ſarà $\frac{5 \times \overline{5-1} \times \overline{5-2}}{2. \quad 3.}$. Per la ſerie IV. ſarà $\frac{5 \times \overline{5-1} \times \overline{5-2} \times \overline{5-3}}{2. \quad 3. \quad 4}$. Per la ſerie V. ella ſarà $\frac{5 \times \overline{5-1} \times \overline{5-2} \times \overline{5-3} \times \overline{5-4}}{2. \quad 3. \quad 4 \quad 5.}$ ec.

1311. Quanto poi ai piramidali degli altri generi ſuperiori, della ſomma de' quali ſi è parlato all' Articolo V., qualora ne ſarà propoſto un certo numero da ſommarſi, ſe s' intenderà, che in tale numero ſiano computati per termini anche i zeri convenienti al corriſpondente ordine nel primo genere, in tal caſo per avere la ſomma di queſti figurati biſognerà far uſo delle eſpreſſioni date al num. 1310. relativamente al modo accennato nell' Articolo V.: Onde la ſomma di ſei piramidali del ſecondo ordine nel terzo genere (quali termini reſtano tre, perchè fra loro ſi ſono computati tre zeri) ſarà

$$\overline{3-1} \times \frac{5 \times \overline{5\ \ 1} \times \overline{5-2} \times \overline{5-3}}{2. \quad 3. \quad 4.} + \frac{6 \times \overline{6-1} \times \overline{6-2} \times \overline{6-3}}{2. \quad 3. \quad 4} = \frac{240}{24} + \frac{360}{24} = 25.$$

1312.

ARTICOLO VI.

Modo di determinare le somme de' figurati di qualsivoglia ordine, e genere le di cui serie generatrici non cominciano dall' unità.

1312. NE' precedenti Articoli il Problema di determinare la somma di quali, e quanti si vogliono figurati non godeva di tutta la sua universalità, di cui è capace, mentre si supponeva, che le serie generatrici cominciassero dall'unità: Ora in questo Articolo esporrò il rimanente, che serve a generalizzare la soluzione di questo Problema, onde in questa materia non resti altro a desiderarsi, lo che non era stato fatto ancora.

1313. E primieramente quanto ai numeri genitori di qualsivoglia genere, di cui il primo termine sia un qualunque numero, si osservi, che essi nascono sempre dai genitori dello stesso genere principianti dall'unità, a ciascun termine de' quali sia aggiunto il primo termine de' genitori proposti diminuito di una unità: Per Esempio questa serie *6.* 7. 8. *9.* 10. 11. 12. ec. di genitori del primo genere risulta da' termini 1. 2. 3. 4. 5. *6.* 7. de' genitori del primo genere principianti dall' unità, ognuno de' quali sia accresciuto del primo termine *6* de' genitori dati diminuito di una unità, cioè accresciuto di 5, così

Genitori del primo genere	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	
$6 - 1 =$	5.	5.	5.	5.	5.	5.	5.	
Somma	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	Genit. proposti

Istessamente questi genitori del quinto genere 11. 16. 21. 26. 31. ec. nascono dai

Genitori del quinto genere	1.	6.	11.	16.	21.	26.	
Primo termine 11. dimin. di una unità	10.	10.	10.	10.	10.	10.	
Somma	11.	16.	21.	26.	31.	36.	Genitori proposti.

Ciò posto ne nasce la soluzione dei seguenti due Problemi.

1314. Prob. 1. Dato un certo numero di genitori del primo genere non principianti dall' unità, come 9. 10. 11. 12. ec., de' quali il numero sia sette, se ne debba ritrovare la somma. Intendasi che sia dato il primo termine, che nel caso presente e 9.

1315. Risol. Si prenda la somma di altrettanti figurati del primo genere principianti dall'unità (giusta il num. 1298.), indi a questa somma si aggiunga il prodotto, che nasce dal moltiplicarsi il dato numero de' termini nel primo termine de' genitori proposti diminuito di una unità: Onde nel presente caso la somma di sette genitori sarà $\overline{9 - 1} \times 7 + 7 \times \frac{\overline{7 + 1}}{2} = 56 + 28 = 84$

1316. Prob. 2. Dato il primo termine de' genitori di qualsivoglia genere, e dato il loro numero, se ne debba ritrovare la somma.

1317. Risol. Pel num. 1307. si trovi la somma di altrettanti genitori dello stesso genere principianti dall' unità, indi a questa somma si aggiunga il prodotto, che nasce dal moltiplicarsi il dato numero de' termini nel primo termine de' proposti genitori diminuito di una unità; e ciò, che ne verrà, sarà la somma cercata. Si voglia per esempio la somma di dieci termini de' genitori del quarto genere principianti da 6: Si farà $\overline{6-1}\times 10 + \overline{4-1}\times 9\times \frac{\overline{9+1}}{2} + 10\times\frac{\overline{10+1}}{2} =$ $50 + 135 + 55 = 240$. Somma cercata.

1318. In secondo luogo quanto ai Piramidali del primo ordine in qualsivoglia genere, il di cui primo termine sia un qualunque numero, si osservi che essi nascono sempre dai genitori del primo genere principianti dall'unità, ognuno de' quali sia moltiplicato nel primo termine de' proposti piramidali diminuito di una unità, quali siano sommati per ordine coi Piramidali del primo ordine nello stesso genere principianti dall'unità. Per esempio questi piramidali del primo ordine nel primo genere 5. 11. 18. 26. 35. 45. ec. risultano da'

Piramidali del primo ordine nel primo genere	1.	3.	6.	10.	15.	
	1X4.	2X4.	3X4.	4X4.	5X4.	
Somma	5.	11.	18.	26.	35.	Piramidali proposti.

Di questi Piramidali poi la serie generatrice è 5. 6. 7. 8. 9. ec.
Istessamente i seguenti Piramidali primi del sesto genere 17. 40. 69. 104. ec. risultano da'

Piramidali primi del sesto genere	1.	8.	21.	40.	65.	
	1X16.	2X16.	3X16.	4X16.	5X16.	
Somma	17.	40.	69.	104.	145.	Piramidali proposti.

1319. Prob. 3. Dato il primo termine di un certo numero di Piramidali primi del primo genere non principianti dall'unità, se ne debba determinare la somma.

1320. Risol. Pel num. 1298. si prenda la somma di altrettanti genitori del primo genere principianti dall' unità, quale somma si moltiplichi pel primo termine dato de' Piramidali da sommarsi diminuito di una unità, indi vi si aggiunga la somma di altrettanti Piramidali primi del primo genere principianti dall' unità, e ciò, che ne verrà sarà, la somma cercata. Per esempio dovendosi trovare la somma di otto Piramidali primi del primo genere, il di cui primo termine sia 5, si farà

$$\overline{5-1}\times 8\times\frac{\overline{8+1}}{2} + 8\times\frac{\overline{8+1}}{2.}\times\frac{\overline{8+2}}{3.} = 144 + 120 = 264 \text{ Somma cercata.}$$

1321. Prob. 4. Dato il numero de' Piramidali primi di qualsivoglia genere non principianti dall'unità, e dato il loro primo termine, se ne debba determinare la somma.

1322. Risol. Si prenda la somma di altrettanti genitori del primo genere principianti dall'unità (pel num. 1298), quale somma si moltiplichi nel dato primo termine de' Piramidali da sommarsi diminuito di una unità, indi vi si aggiunga la somma di altrettanti Piramidali dello stesso ordine, e genere proposto principianti dall'

dall'unità (giusta il num. 1307.), e ciò, che ne verrà, sarà la somma cercata. Dovendosi per Esempio trovare la somma di sei Piramidali primi del quinto genere, che incominciano dal 7, si farà

$$\overline{7-1}\times 6\times\frac{\overline{6+1}}{2}+\overline{5-1}\times 5\times\frac{\overline{5+1}\times\overline{5+2}}{2.\ \ 3.}+6\times\frac{\overline{6+1}\times\overline{6+2}}{2.\ \ 3.}=126+$$

$140 + 56 = 322$, che è la somma cercata di sei termini Piramidali primi del quinto genere principianti da 7.

1323. In terzo luogo quanto ai Piramidali del secondo ordine in qualsivoglia genere si osservi, che qualora non cominciano dall'unità, essi nascono sempre dalla serie de' Piramidali primi nel primo genere principianti dall'unità, ognuno de' quali sia moltiplicato nel primo termine de' Piramidali proposti diminuito di una unità, indi sommati ordinatamente coi Piramidali dell'ordine, e del genere proposto principianti dall'unità. Per esempio questi Piramidali del secondo ordine nel primo genere 8. 25. 52. 90. 140. 203. ec. risultano da'

Piramidali secondi del primo genere	1.	4.	10.	20.	35.	56.	
	1×7.	3×7.	6×7.	10×7.	15×7.	21×7.	
Somma	8.	25.	52.	90.	140.	203.	Piramid. proposti.

Parimente i seguenti Piramidali secondi del quarto genere 11. 37. 82. 150. 245. ec. risultano da'

Piramidali secondi del quarto genere	1.	7.	22.	50.	95.	
	1×10.	3×10.	6×10.	10×10.	15×10.	
Somma	11.	37.	82.	150.	245.	Piramidali proposti.

Ciò posto nasce la soluzione dei seguenti due Problemi.

1324. Prob. 5. Dato il primo termine di un certo numero di Piramidali secondi del primo genere non principianti dall'unità, se ne debba determinare la somma.

1325. Risol. Si prenda la somma di altrettanti Piramidali primi del primo genere principianti dall'unità, quale si moltiplichi nel primo termine de' proposti Piramidali diminuito di una unità; indi vi si aggiunga la somma di altrettanti Piramidali secondi del primo genere principianti dall'unità, e ciò, che ne verrà, sarà la somma cercata. Per Esempio volendosi la somma di sette Piramidali secondi del primo genere, il di cui primo termine sia 13, si farà

$$\overline{13-1}\times 7\times\frac{\overline{7+1}\times\overline{7+2}}{2.\ \ 3.}+7\times\frac{\overline{7+1}\times\overline{7+2}\times\overline{7+3}}{2.\ \ 3.\ \ 4.}=1008+210=1218$$

Somma cercata.

1326. Prob. 6. Dato il numero de' Piramidali secondi di qualsivoglia genere non principianti dall'unità, e dato il loro primo termine, se ne debba determinare la somma.

1327. Risol. Pel num. 1300. si prenda la somma di altrettanti Piramidali primi del primo genere principianti dall'unità, quale si moltiplichi nel primo termine de' proposti Piramidali diminuito di una unità; indi (giusta il num. 1307.) vi si aggiunga la somma di altrettanti Piramidali dell'ordine, e genere proposto principian-

ti

ti dall'unità, e ciò, che ne verrà, sarà la somma cercata: Come volendosi la somma di nove Piramidali secondi del settimo genere, il di cui primo termine sia 10, si farà

$$\overline{10-1}\times 9\times\frac{\overline{9+1}\times\overline{9+2}}{2.\quad 3.} + \overline{7-1}\times 8\times\frac{\overline{8+1}\times\overline{8+2}\times\overline{8+3}}{2.\quad 3.\quad 4.} +$$

$$9\times\frac{\overline{9+1}\times\overline{9+2}\times\overline{9+3}}{2.\quad 3.\quad 4.} = 1485 + 1980 + 495 = 3960,$$ che è la somma cercata.

1328. Già abbastanza ho scoperto il metodo per determinare le somme di quanti, e quali si vogliono altri figurati non principianti dall'unità, mentre ho scoperto la regola costante, con cui nascono questi figurati. Per lo che i figurati del terzo ordine in qualsivoglia genere, o sia generalmente i figurati di un qualunque ordine in qualsivoglia genere nascono dalla somma di altrettanti figurati dell'ordine prossimo minore principianti dall'unità, quale somma sia moltiplicata nel primo termine de' figurati proposti diminuito di una unità, più la somma di altrettanti figurati principianti dall'unità dell' ordine, e genere de' proposti.

1329. E' superfluo il fare riflettere, che il primo termine della serie generante è lo stesso, che il primo termine di qualunque altra de' figurati, che da essa nascono.

E S E M P I O.

1330. Prob. 7. Cercasi il numero delle Palle da Cannone, che sono in una Pila, la di cui base costa di quattro lati, de' quali i due contigui sono ineguali, e gli opposti sono eguali, che dicesi base quadrangolare.

1331. Risol. Si osservi, che ciascun lato d' ogni piano superiore ha una palla di meno, che il sottoposto prossimo piano inferiore; in secondo luogo che tanti sono i piani di queste palle, quante unità contiene il lato minore; in terzo luogo, che l' ultimo piano superiore avrà una sola fila di palle, il di cui numero sarà la differenza, che passa tra il lato maggiore della base, e il contiguo lato minore diminuito di una unità; così che se il lato maggiore della base avrà 24 palle, e il contiguo minore ne abbia 13, che diminuito di una unità è 12, l'ultimo piano superiore della Pila avrà 24 — 12 = 12 palle in fila. E perchè ciascun lato inferiore rispetto al suo prossimo superiore va crescendo di una palla, e il numero delle palle, che sono in ciascun piano, si ha con moltiplicare il lato maggiore nel minore: Quindi nel proposto caso, che la Pila abbia 24 palle in un lato della base, e 13 nell'altro, il numero delle palle nel piano della base sarà 24 × 13 = 312; nel prossimo susseguente sarà 23 × 12 = 276; in quello che segue sarà 22 × 11 = 242; indi in poi questi piani saranno 210; 180; 152; 126; 102; 80; 60; 42; 26, e 12 che è l'ultima fila superiore: Ora questi sono Piramidali primi del secondo genere, e tali pure sono i numeri, che risultano nel modo detto da qualunque altra Pila quadrangolare, il di cui primo termine è sempre la differenza, che passa tra il lato maggiore, e il lato minore diminuito di una unità: Per lo che si determinerà il numero di tutte le palle, che sono in una Pila quadrangolare giusta il num. 1320. Nell'Esempio proposto la somma sarà (perchè il primo termine della serie è 12).

$$\overline{12-1}\times 13\times\frac{\overline{13+1}}{2} + \overline{2-1}\times 12\times\frac{\overline{12+1}\times\overline{12+2}}{2.\quad 3.} + 13\times\frac{\overline{13+1}\times\overline{13+2}}{2.\quad 3.}$$

$= 1001 + 364 + 455 = 1820.$

ARTI-

ARTICOLO VII.

Modo di sommare le serie de' quadrati, dei Cubi, dei quadrato-quadrati, e delle altre potestà superiori, che si formano da ciascuno de' termini della serie naturale.

1332. PEr poco, che si rifletta ai num. 762, 808, 844, 867, 868, si scorgerà facilmente, che le serie dei quadrati, dei cubi, de' quadrato-quadrati, e susseguentemente delle altre potestà superiori, che si formano dai termini della serie naturale, sono numeri figurati, e però il Problema di sommare le serie di queste potestà si riduce al Problema di sommare i figurati di un certo ordine, e genere.

1333. La serie pertanto de' quadrati non è altro, che la serie de' Piramidali primi, o sia de' figurati del primo ordine nel secondo genere: La serie de' Cubi è la serie di certi figurati del secondo ordine nel sesto genere; così quella de' quadrato-quadrati è la serie di certi figurati del terzo ordine nel vigesimo quarto genere: E generalmente la serie delle potestà dello stesso esponente è sempre una serie di figurati nella determinazione del termine, da cui cominciansi a sommare le progressioni aritmetiche generatrici (se però si eccettui la serie de' quadrati) differenti da quelli, de' quali abbiamo ne' precedenti Articoli trattato, il di cui ordine viene determinato dal grado della potestà diminuito di una unità, alla quale sono inalzati i termini della serie naturale principiante dall' unità, e il genere viene espresso dal prodotto di altrettanti termini della stessa serie naturale principiante dall' unità, quanti ne indica lo stesso esponente della potestà, cioè da $1 \times 2 = 2$ per la serie de' quadrati; da $1 \times 2 \times 3 = 6$ per la serie de' Cubi; da $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ per la serie de' quadrato-quadrati ec.

1334. Le progressioni poi Aritmetiche generatrici di queste serie di figurati incominciano dal zero rispettivamente alle serie delle potestà d' esponente impari, ma per le serie delle potestà d' esponente pari incominciano dalla metà dell' esponente, o sia differenza della progressione aritmetica, vale a dire le progressioni aritmetiche generatrici delle serie delle terze, delle quinte, delle settime ec. potestà incominciano dal zero, ma la progressione aritmetica generatrice per la serie delle seconde potestà incomincia dall' 1, per la serie delle quarte potestà incomincia dal 12, per la serie delle seste potestà incomincia dal 360, per la serie dell' ottave potestà incomincia dal 20160 ec. Questo primo termine però della progressione aritmetica generatrice non serve di principio alle somme, da cui susseguentemente derivano le altre serie intermedie, che cadono tra la progressione aritmetica, e la serie delle potestà, ne è così facile lo stabilire tale principio, che si nasconde tra la reciproca concatenazione, e dipendenza de' termini in queste serie, che dall' unità loro costante termine di mezzo con certa legge corrispondentemente ai termini tanto positivi, quanto negativi della serie naturale si vanno a perdere a destra, e a sinistra nell' infinito, con questo divario però, che le serie delle potestà d' esponente pari vanno tanto di quà, come di là all' infinito con termini sempre positivi, laddove le potestà d' esponente impari procedono a destra all' infinito con termini positivi, e alla sinistra con termini negativi.

1335. Gli Esempj metteranno sotto gli occhi le cose dette. Sotto a ciascun termine della serie delle potestà noterò il termine della serie naturale col suo conveniente esponente, da cui tale termine della serie è risultato

Per la serie de' Quadrati

Differenze della Progress. Aritm.	2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2.
Progressione Aritmetica	$-9. -7. -5. -3. -1. +1. +3. +5. +7.$
Serie de' Quadrati	$+16. +9. +4. +1. \; 0. +1. +4. +9. +16.$
Corrispondenti termini della serie naturale ec.	$-4^2 -3^2 -2^2 -1^2 \; 0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

Per la serie de' Cubi

Differ. della Progress. Aritm.	6. 6. 6. 6. 6. 6. 6. 6. 6. 6.
Progressione Aritmetica	$-36. -30. -24. -18. -12. -6. \; 0. +6. +12. +18. +24.$
Serie generata	$+91. +61. +37. +19. +7. +1. +1. +7. +19. +37. +61.$
Serie de' Cubi	$-125. -64. -27. -8. -1. \; 0. +1. +8. +27. +64. +125.$
Corrispondenti termini della serie naturale ec.	$-5^3 -4^3 -3^3 -2^3 -1^3 \; 0 +1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$

Per la serie dei quadrato-quadrati

Differ. della Progress. Aritm.	24. 24. 24. 24. 24. 24. 24. 24. 24. 24.
Progressione Aritmetica	$-136 -112 -108 -84 -60 -36 -12 +12 +36 +60 + 84$
Prima serie generata	$+414 +302 +194 +110 +50 +14 +2 +14 +50 +110 +194$
Seconda serie generata	$-671 -369 -175 -65 -15 -1 +1 +15 +65 +175 +369$
Serie de' quadrato-quadr.	$+625 +256 + 81 + 16 + 1 \; 0 +1 +16 +81 +256 +625$
Corrisp. termini della serie naturale ec.	$-5^4 - 4^4 - 3^4 - 2^4 - 1 \; 0 +1^4 +2^4 +3^4 +4^4 + 5^4$

Per la serie dei Quadrato-cubi

Differenze della progress. Aritm.	120. 120. 120. 120. 120. 120. 120. 120. 120. 120.
Pogress. Arit.	$-720 -600 -480 -360 -240 -120 \; 0 \; +120 + 240 + 360$
Prima serie gen.	$+1830 + 1230 + 750 + 390 + 150 + 30 + 30 + 150 + 390 + 750$
Secon. serie gen.	$-2550 -1320 -570 -180 -30 + 0 + 30 +180 + 570 +1320$
Terza serie gen.	$+2101 + 781 +211 + 31 + 1 + 1 + 31 +211 + 781 +2101$
Serie de' quadrati-cubi	$-1024 -243 -32 -1 \; 0 + 1 + 32 +243 + 1024 + 3125$
Corrisp. term. della serie naturale	$-4^5 -3^5 -2^5 -1^5 \; 0 +1^5 + 2^5 +3^5 + 4^5 + 5^5$

1336. Poichè la determinazione di formole generali per la somma di queste serie non è così facile, però ho pensato meglio ridurre la soluzione del presente Problema alla serie de' numeri figurati, de' quali ho parlato ne' precedenti Articoli, e ciò ho fatto mediante alcune osservazioni, che mi portano con maggiore facilità, e speditezza alla soluzione cercata.

1337. Prob. 1. Dato il numero de' termini della serie naturale principiante dall' unità, si debba determinare la somma de' loro quadrati.

1338. Risol. si prenda (pel num. 1307.) il Piramidale del secondo ordine de' figurati nel secondo genere, il quale viene determinato dal proposto numero di ter-

termini della ſerie naturale, ed egli darà la ſomma cercata. Per Eſempio volendoſi la ſomma de' quadrati dei primi ſette termini della ſerie naturale, ſi farà

$$\overline{2-1}\times 6\times\frac{\overline{6+1}\times\overline{6+2}}{2.\quad 3.} + 7\times\frac{\overline{7+1}\times\overline{7+2}}{2.\quad 3.} = 1\times\frac{\overline{336}}{6.} + 7\times\frac{\overline{72}}{6.} =$$

$56 + 48 = 140.$ ſomma cercata.

1339. Prob. 2. Dato il numero de' termini della ſerie naturale principiante dall' unità, debbaſi determinare la ſomma de' loro Cubi.

1340. Riſol. Si prenda (pel num. 1283. o pure pel num. 1285.) il numero triangolare, che viene determinato dal propoſto numero di termini della ſerie naturale, e il ſuo quadrato darà la ſomma cercata. Per Eſempio volendoſi la ſomma de' Cubi degli undici primi termini della ſerie naturale, ſi farà

$$\overline{\frac{11\times\overline{11+1}}{2}}^{\,2} = \overline{\frac{11\times 12}{2}}^{\,2} = 4356.$$ ſomma cercata.

1341. Prob. 3. Dato il numero de' termini della ſerie naturale principiante dall' unità, debbaſi determinare la ſomma de' loro quadrato-quadrati.

1342. Riſol. Si prenda (pel num. 1307.) la ſomma di altrettanti Piramidali del terzo ordine nel ſecondo genere, quanti ne indica il propoſto numero di termini diminuito di una unità, e a queſta ſomma moltiplicata in 12 ſi aggiunga la ſomma di tanti Piramidali del primo ordine nello ſteſſo ſecondo genere, quanti ne eſprime il propoſto numero di termini, e ciò, che ne verrà, ſarà la ſomma cercata. Per Eſempio volendoſi la ſomma de' quadrato-quadrati de' ſei primi termini della ſerie naturale, ſi farà

$$\overline{\overline{2-1}\times\frac{4\times\overline{4+1}\times\overline{4+2}\times\overline{4+3}\times\overline{4+4}}{2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.} + \frac{5\times\overline{5+1}\times\overline{5+2}\times\overline{5+3}\times\overline{5+4}}{2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.}}\times 12$$

$$+\overline{2-1}\times 5\times\frac{\overline{5+1}\times\overline{5+2}}{2.\quad 3.} + 6\times\frac{\overline{6+1}\times\overline{6+2}}{2.\quad 3.} = \overline{\frac{6720}{120} + \frac{15120}{120}}\times 12$$

$$+\frac{210}{6} + \frac{336}{6} = 2184 + 91 = 2275.$$ ſomma cercata.

1343. Prob. 4. Dato il numero de' termini della ſerie naturale principiante dall' unità, debbaſi determinare la ſomma de' loro quadrato-cubi.

1344. Riſol. Si prenda (pel num. 1303.) la ſomma di altrettanti Piramidali del quarto ordine nel primo genere, quanti ne indica il propoſto numero di termini diminuito di due unità, e a queſta ſomma moltiplicata in 120 ſi aggiunga la ſomma di tanti Piramidali del ſecondo ordine nello ſteſſo primo genere, quanti ne indica il propoſto numero di termini diminuito di due unità, più la ſomma di tanti Piramidali del ſecondo ordine nel vigeſimonono genere, quanti ne eſprime il numero de' termini propoſti, e ciò, che ne verrà, ſarà la ſomma cercata. Per Eſempio volendoſi la ſomma dei quadrato-cubi de' ſei primi termini della ſerie naturale, ſi farà

$$\overline{\frac{4\times\overline{4+1}\times\overline{4+2}\times\overline{4+3}\times\overline{4+4}\times\overline{4+5}}{2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6.}}\times\overline{120}$$

$$+4\times\frac{4+1}{2}\times\frac{4+2}{3}\times\frac{4+3}{4}+\overline{29-1}\times5\times\frac{5+1}{2}\times\frac{5+2}{3}\times\frac{5+3}{4}$$

$$+6\times\frac{6+1}{2}\times\frac{6+2}{3}\times\frac{6+3}{4}=\frac{60480}{720}\times120+\frac{840}{24}+\frac{47040}{24}+\frac{3024}{24}$$

$=10080+35+1960+126=12201$ ſomma cercata.

1345. Andrebbe la coſa in infinito, ſe io voleſſi con egual paſſo dare la ſoluzione di ciaſcun problema per l'altre ſuſſeguenti ſerie delle poteſtà ſuperiori, però baſteranno le già eſpoſte ſoluzioni, dalle quali prender lume potrà chiunque a fine di ſaperſi regolare al caſo di dover prendere la ſomma delle ſerie d'altre poteſtà nate dai termini della ſerie naturale. Una coſa ſolamente reſtami d'avvertire, ed è, che può ſuccedere di dover prendere la ſomma di un certo numero di termini della ſerie naturale elevati a una propoſta poteſtà, i quali termini della ſerie naturale non comincino dall' unità: In queſto caſo ſi prenda la ſomma (coi metodi eſpoſti) dei termini della ſerie naturale elevati a tale poteſtà, tra' quali ſiano compreſi anche quelli, che mancano fino all' unità, indi da tale ſomma ſi ſottri la ſomma dei termini mancanti per andare all' unità elevati alla ſteſſa poteſtà, e il reſiduo ſarà la ſomma cercata.

CAPO VIII.

Delle Combinazioni, e Permutazioni.

ARTICOLO I.

Delle Combinazioni.

1346. DEf. 1. Le combinazioni non ſono altro, che unioni, o ſia congiunzioni di alcune coſe fra loro ſenza riguardo all'ordine, o al ſito, che nell' accoppiarſi poſſono avere fra ſe.

1347. Le coſe poi ſi poſſono combinare a due a due; a tre a tre; a quattro a quattro ec., e però quando verrà propoſto di combinare tra loro alcune coſe date, altro non vorraſſi, che prenderle, o a due a due; o a tre a tre ec.: Che ſe ſi vorranno tutte le combinazioni poſſibili di un certo numero di coſe, ſi dovià ritrovare quante volte eſſe ſi poſſono prendere a due a due; a tre a tre; a quattro a quattro; a cinque a cinque ec., di maniera che però in ciaſcuna combinazione non ſi prenda più d'una volta ognuna di loro.

1348. Def. 2. Il numero, ſecondo cui ſi combinano le coſe, ſi dice Eſponente, il quale è 2 per gli ambi; è 3 per i Terni; è 4 per le quaderne; è 5 per le cinquine ec.

1349. Per mettere ſotto gli occhi il più, che ſia poſſibile le operazioni delle combinazioni, in vece delle coſe, che ſecondo i varii caſi poſſono eſſere propoſte da combinarſi, farò uſo delle lettere dell'Alfabeto.

1350.

1350. Teor. 1. Di una cosa sola secondo l'esponente 2 la combinazione è zero; e di due cose la combinazione è una; come *ab*, essendo le cose *a*, *b*

1351. Dim. La combinazione (pel num. 1346.) non è altro, che la unione di più cose; dunque la cosa essendo una, la sua combinazione sarà zero: Se poi le cose date sono due, perchè due cose si possono congiungere insieme una sola volta, la combinazione di due cose è una.

1352. Corol. 1. Tre cose adunque, come *a*, *b*, *c*, possono ricevere tre combinazioni, prendendole a due a due, poichè oltre la combinazione *ab* (pel num. 1350.) delle due prime, si può combinare la terza con ciascuna delle due prime, con che ne viene *ab*, *ac*, *bc*.

1353. Corol. 2. Quattro cose poi prese a due due riceveranno sei combinazioni, perchè oltre le tre combinazioni delle tre prime (giusta il num. 1352.) con ciascuna delle tre prime cose si potrà pure combinare la quarta, onde si abbia *ab*, *ac*, *bc*, *ad*, *bd*, *cd*, essendo le cose date *a*, *b*, *c*, *d*.

1354. Corol. 3. Se le cose date sono cinque *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, prese a due a due riceveranno dieci combinazioni, perchè oltre le sei combinazioni delle quattro prime (giusta il num. 1353.), con ciascuna di loro si potrà combinare la quinta così *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *bc*, *bd*, *be*, *cd*, *ce*, *de*.

1355. Procedendo collo stesso metodo si vedrà, che sei cose ricevono quindici combinazioni a due a due; sette cose ne ricevono 21 ec.

1356. Per lo che i numeri delle combinazioni secondo l'esponente 2 sono 0. 1. 3. 6. 10. 15. ec. cioè sono numeri triangolari primi (pel num. 1277.), che hanno il zero in principio; e però il numero delle combinazioni, che secondo l'esponente 2 ammettono alcune cose è un numero triangolare, il di cui lato differisce di una unità dal numero delle quantità, o cose date da combinarsi.

1357. Corol. 4. Onde dato il numero di alcune cose da combinarsi secondo l'esponente 2, si avrà il numero di tutte le combinazioni pel num. 1310. Per Esempio le cose date essendo sei, il numero de' loro ambi sarà $6 \times \frac{\overline{6-1}}{2} = 15$ che è il quinto termine de' numeri triangolari.

1358. Teor. 2. Di una, o di due cose secondo l'esponente 3 la combinazione è zero; e di tre cose la combinazione è una.

1359. Dim. La combinazione secondo l'esponente 3 non è altro, che prendere le cose date a tre a tre; dunque se le cose date saranno solamente una, o due, la loro combinazione secondo l'esponente 3 sarà zero. Che se saranno tre, la loro combinazione sarà una, perchè tre cose si possono unire insieme tutte tre una sola volta. Lo che si doveva dimostrare.

1360. Corol. 1. Quattro cose adunque secondo l'esponente 3 riceveranno quattro combinazioni, poichè oltre una combinazione delle tre prime (pel num. 1358.), la quarta si potrà combinare con ciascuno degli ambi delle tre prime: Ma (pel num. 1352.) tre cose secondo l'esponente 2 ammettono tre combinazioni; dunque secondo l'esponente 3 quattro cose riceveranno quattro combinazioni.

1361. Corol. 2. Cinque cose poi riceveranno dieci combinazioni, poichè oltre le quattro combinazioni delle quattro prime cose (pel num. 1360.), si avranno le combinazioni della quinta con ciascun' ambo delle quattro prime; e siccome (pel num. 1353.) quattro cose danno sei ambi, perciò il numero di tutte le combinazioni secondo l'esponente 3 di cinque cose sarà dieci.

1362. Corol. 3. Così sei cose prese a tre a tre riceveranno venti combinazioni, poichè oltre le dieci combinazioni delle prime cinque (giusta il num. 1361.), si hanno le combinazioni della sesta con ciascun'ambo delle cinque prime cose; e da cinque cose risultando (pel num. 1354.) dieci ambi; perciò il numero di tutte le combinazioni di sei cose a tre tre sarà venti.

1363. Con questo metodo procedendo si può vedere, che sette cose secondo l'esponente 3 ricevono 35 combinazioni; otto ne ricevono 56 ec.

1364. Quindi i numeri delle combinazioni secondo l'esponente 3 essendo 0. 0. 1. 4. 10. 20. 35. 56 ec., essi trovansi essere i piramidali del secondo ordine nel primo genere (giusta il num. 1288.), che hanno in principio due zeri; e però il numero delle combinazioni, che secondo l'esponente 3 ricevono alcune cose, è un numero piramidale del secondo ordine, il di cui lato differisce di due unità dal numero delle cose date da combinarsi.

1365. Corol. 4. E però essendo dato il numero di alcune cose da combinarsi secondo l'esponente 3, si avrà il numero di tutte le combinazioni (pel num. 1310.). Per Esempio le cose date essendo otto, il numero de'loro terni sarà $8 \times \frac{8-1}{2} \times \frac{8-2}{3} = 56$, che è il sesto termine de' piramidali del secondo ordine nel primo genere.

1366. Se egualmente si vorrà discorrere delle combinazioni secondo gli altri esponenti, si vedrà, che secondo l'esponente 4 i numeri delle combinazioni saranno 0. 0. 0. 1. 5. 15. 35. 70. 126. ec., che (pel num. 1288.) sono piramidali del terzo ordine nel primo genere; e però il numero delle combinazioni, che secondo l'esponente 4 ricevono alcune cose, è un numero piramidale del terzo ordine nel primo genere, il di cui lato differisce di tre unità dal numero delle cose date da combinarsi. Quindi essendo dato il numero di alcune cose da combinarsi secondo l'esponente 4, si avrà il numero di tutte le combinazioni (pel num. 1310.). Per Esempio le cose date essendo nove, il numero delle loro quaderne sarà $9 \times \frac{9-1}{2} \times \frac{9-2}{3} \times \frac{9-3}{4} = 126$, che è il sesto termine de' piramidali del terzo ordine nel primo genere.

1367. Parimente se l'esponente sarà 5, i numeri delle combinazioni saranno 0. 0. 0. 0. 1. 6. 21. 56. 126., ec., che (pel num. 1288.) sono i numeri piramidali del quarto ordine nel primo genere; conseguentemente il numero delle combinazioni, che secondo l'esponente 5 ricevono alcune cose, è un numero piramidale del quarto ordine nel primo genere, il di cui lato differisce di quattro unità dal numero delle cose date da combinarsi. Onde essendo dato il numero di alcune cose da combinarsi secondo l'esponente 5, si avrà il numero di tutte le combinazioni (pel num. 1310.). Per Esempio le cose date essendo sette, il numero delle loro cinquine sarà $7 \times \frac{7-1}{2} \times \frac{7-2}{3} \times \frac{7-3}{4} \times \frac{7-4}{5} = 21$.

1368. Collo stesso metodo si determinerà il numero di tutte le combinazioni per ciascuno dei susseguenti esponenti maggiori.

1369. Dalle precedenti soluzioni si ricava la regola generale per determinare il numero di tutte le combinazioni, che secondo qual più piaccia esponente può ricevere un dato numero di cose; ed è di fare due progressioni aritmetiche natura-

rali, una ascendente, che incominci dall'unità, e l'altra discendente, che incominci dal numero delle cose da combinarsi, e l'una, e l'altra di tanti termini, quanti ne mostra l'esponente, indi dividere il prodotto dei termini della prima pel prodotto dei termini della seconda.

1370. Prob. Dato un certo numero di cose si debba determinare il numero di tutte le loro combinazioni possibili.

1371. Risol. Osservo, che essendo dato un certo numero di cose da combinarsi, il maggiore esponente, secondo cui possono essere combinate, è lo stesso numero delle cose date: Per lo che per avere tutte le combinazioni possibili delle dette cose non altro devesi fare, che prendere la somma di tutte le combinazioni secondo ciascun esponente, cominciando dall'esponente 2 fino all'esponente determinato dal numero delle cose date. Per Esempio siano date cinque cose, di cui si vogliono tutte le combinazioni possibili. Si faccia $5\times\frac{\overline{5-1}}{2.} + 5\times\frac{\overline{5-1}\times\overline{5-2}}{2.\quad 3.}$

$+ 5\times\frac{\overline{5-1}\times\overline{5-2}\times\overline{5-3}}{2.\quad 3.\quad 4} + 5\times\frac{\overline{5-1}\times\overline{5-2}\times\overline{5-3}\times\overline{5-4}}{2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.} = 26$ numero di tutte le combinazioni possibili secondo gli esponenti 2, 3, 4, 5, che possono ricevere cinque cose.

ARTICOLO II.

Delle Permutazioni, o sia Variazioni.

1372. DEf. Le permutazioni non sono altro, che le mutazioni d'ordine, o di luogo, che possono accadere ad alcune date cose, in quanto che il luogo, che da prima si occupava da una, mediante la permutazione, resti occupato dall'altra: Per Esempio si permuteranno due cose, se quella che era a destra passi a sinistra, e quella che era a sinistra passi a destra: E però il numero delle permutazioni di alcune cose date secondo l'esponente 2 sarà doppio del numero delle loro combinazioni secondo lo stesso esponente, mentre la stessa combinazione per ragione del sito si deve prendere due volte: Onde tre cose *a*, *b*, *c* riceveranno sei permutazioni così ***ab*, *ba*, *ac*, *ca*, *bc*, *cb***. Quattro cose *a*, *b*, *c*, *d* riceveranno dodici permutazioni così ***ab*, *ba*, *ac*, *ca*, *bc*, *cb*, *ad*, *da*, *bd*, *db*, *cd*, *dc*** ec.

1373. Quando pertanto viene proposto di trovare tutte le permutazioni di alcune date cose, niente altro si cerca, se non se di determinare quante volte ciascuna delle date cose possa mutare il suo sito acquistandone sempre un nuovo: Come sarebbe il cercare quante volte ciascuna di otto persone, che sedono a una Tavola, possa cambiare il suo luogo relativamente a chi gli sta a canto, acquistandone sempre un nuovo.

1374. Le cose proposte, o possono essere tutte diverse, o ve ne possono essere delle eguali. Per ora le supporremo tutte diverse.

1375. Teor. 1. Una cosa sola, siccome non può occupare, che un sol sito, perchè essendo solitaria non ha con chi cambiarlo, ha una sola permutazione, come *a*.

1376. Teor. 2. Due cose, come *a*, *b*, ammettono due permutazioni.

1377. Dim. Posta la prima cosa comunque, la seconda si può mettere in due siti, cioè avanti, e dopo così *ab*, *ba*, dunque due cose ammettono due sole permutazioni. Lo che si doveva dimostrare.

1378 Corol. 1. Se saranno date adunque tre cose, come *a*, *b*, *c*, da permutarsi, esse potranno ricevere sei permutazioni, perchè mentre ciascuna di loro occupa il primo posto, le altre due (pel num. 1376.) si possono permutare due volte: Onde ne viene *abc*, *bac*, *cab*, *acb*, *bca*, *cba*.

1379. Corol. 2. E però quattro cose, come *a*, *b*, *c*, *d*, riceveranno ventiquattro permutazioni, perchè mentre ciascuna delle date quattro cose occupa il primo posto, le altre tre (pel num. 1378.) si possono permutare sei volte.

1380. Corol. 3. Isteffamente ne segue, che cinque cose ricevono centoventi permutazioni, perchè mentre ciscuna di loro occupa il primo posto, le altre quattro (pel num. 1379.) si possono permutare ventiquattro volte.

1381. Corol. 4. Quindi se ne deduce una regola generale per determinare il numero delle permutazioni, che può subire un certo numero di cose, ed è di formare una serie naturale, che incominci dall'unità, e contenga tanti termini, quanti ne indica il numero delle cose date, indi prendere il numero, che dalla moltiplicazione di tutti i termini di questa serie risulta, mentre tale prodotto sarà il cercato numero di tutte le permutazioni, che possono ricevere le date cose. Come cercandosi il numero delle permutazioni, che sette cose possono ricevere, si farà $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$. numero cercato.

1382. Ora supponiamo, che tra le cose date da permutarsi ve ne siano alcune eguali, in tal caso verrà a diminuirsi il numero delle permutazioni, perchè le cose eguali non possono ammettere, che una sola permutazione, mentre comunque si cambi il loro luogo, a motivo dell'eguaglianza, il loro ordine apparisce sempre quello di prima.

1383. Corol. Se adunque fra le cose date ve ne saranno alcune eguali, o pure alcune, che non debbano mutarsi fra loro, siccome il numero delle loro permutazioni viene espresso (pel num. 1381.) dal prodotto di tanti termini della serie naturale principiante dall'unità, quanti ne mostra il numero di tali cose, ben si vede, che qualora (giusta il num. 1381.) si determina il numero di tutte le permutazioni di alcune cose date, come se fossero tutte diverse, si viene a moltiplicare il giusto numero delle permutazioni per il prodotto di una serie naturale principiante dall'unità, e costante di tanti termini, quanti ne mostra il numero delle cose eguali; e però per avere l'esatto numero di tutte le permutazioni rispetto solamente a quelle cose, che sono diverse, bisogna dividere il ritrovato numero pel prodotto dei termini della serie naturale corrispondente al numero delle cose eguali. Debbasi per Esempio determinare il numero di tutte le permutazioni di nove cose, delle quali quattro sono eguali: Si farà $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{362880}{24} = 15120$.
Che se delle date nove cose due fossero di una spezie, e tre di un'altra, e l'altre tutte diverse, si sarebbe fatto $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{1 \times 2 . \; 1 \times 2 \times 3} = 30240$.

1384. Dove si osservi, che restando immobili le cose eguali, ognuna delle diverse si muta tanto rispetto a loro stesse, come interponendosi in qualunque maniera fra le eguali.

AR-

ARTICOLO III.

Delle combinazioni, in cui ciascuna cosa si combina ancor con se stessa.

1385. DEf. Una cosa dicesi combinarsi con se stessa, quando ella si prende più volte nella stessa combinazione.

1386. Corol. 1. Una sol cosa pertanto combinata con se stessa secondo un qualunque esponente darà una sola combinazione; due cose ne daranno due; tre cose ne daranno tre ec. E generalmente in ciascun esponente il numero delle combinazioni di alcune cose date da combinarsi con se stesse è eguale al numero delle stesse cose.

1387. Corol. 2. Dunque considerando le combinazioni delle cose fra loro, e in oltre di ciascuna con se stessa, si troverà, che una sol cosa, come *a* ammette una sola combinazione *aa*; due cose *a*, *b* amettnno tre combinazioni *aa*, *ab*, *bb*; tre cose amettono sei combinazioni: Così di *a*, *b*, *c* le combinazioni sono *aa*, *ab*, *bb*, *bc*, *cc*, *ac*; quattro cose *a*, *b*, *c*, *d* ammettono dieci combinazioni *aa*, *ab*, *ac*, *ad*, *ab*, *bc*, *bd*, *cc*, *cd*, *dd*.

1388. Corol. 3. I numeri adunque di tutte le combinazioni secondo l'esponente 2 mentre ciascuna cosa si combina ancora con se stessa, sono 1. 3. 6. 10. 15. 21. ec. cioè sono i numeri triangolari primi: Conseguentemente si avrà il numero di tutte le combinazioni di alcune date cose combinate anche con se stesse secondo l'esponente 2 giusta il num. 1298. Dovendosi per Esempio determinare il numero di tutte le combinazioni, che secondo l'esponente 2 ammettono dieci cose, che si devono combinare anche con se stesse, si farà $10 \times \frac{10 + 1}{2} = 55$.

1389. Corol. 4. Parimente una cosa *a* secondo l'esponente 3 riceve una sola combinazione *aaa*; due cose ne ricevono quattro; come di *a*, *b* le combinazioni sono *aaa*, *aab*, *abb*, *bbb*; tre cose *a*, *b*, *c* ne ricevono dieci *aaa*, *aab*, *aac*, *bbb*, *abb*, *bbc*, *ccc*, *acc*, *bcc*, *abc*; così quattro cose ricevono venti combinazioni ec.

1390. Corol. 5. Onde 1. 4. 10. 20. 35. ec. sono i numeri di tutte le combinazioni secondo l'esponente 3, mentre le cose si combinano anche con se stesse, cioè sono i numeri Piramidali del secondo ordine nel primo genere: Per lo che si avrà il numero di tutte queste combinazioni secondo l'esponente 3 giusta il num. 1300. Per Esempio si debba determinare il numero di tutte le combinazioni secondo l'esponente 3, che ricevono cinque cose, quali si devono combinare ancora con se stesse: Si farà $5 \times \frac{5 + 1}{2.} \times \frac{5 + 2}{3.} = 53$.

1391. Collo stesso ordine procedendo si troverà, che i numeri delle combinazioni secondo l'esponente 4 (posto che le cose si deabano combinare anche con se stesse) sono 1. 5. 15. 35. 70. ec., cioè i Piramidali del terzo ordine nel primo genere: E però il numero di tutte queste combinazioni secondo l'esponente 4 si avrà dal num. 1302. Come volendosi il numero delle combinazioni di otto cose secondo l'esponente 4, si farà $8 \times \frac{8 + 1}{2.} \times \frac{8 + 2}{3.} \times \frac{8 + 3}{4} = 330$.

1392. Parimente i numeri delle combinazioni secondo l' esponente 5 saranno 1. 6. 21. 56. 125. ec., che sono i Piramidali del quarto ordine nel primo genere; conseguentemente il numero di tutte le combinazioni secondo l' esponente 5, mentre le cose si devono combinare ancora con se stesse, si avrà dal num. 1303.

1393. Si osservi, che tanto per le combinazioni delle cose, che non devonsi combinare con se stesse, delle quali si è parlato all'Articolo I., come per quelle, che devonsi combinare ancora con se stesse, vengono i Piramidali del primo genere: Ma rispetto alle combinazioni dell' Articolo I. questi Piramidali hanno i rispettivi zeri nel principio della serie, laddove ne sono privi i Piramidali esprimenti i numeri delle combinazioni nel presente Articolo: Quindi è, che l'espressione del numero delle combinazioni data nell' Articolo I. è differente dall' espressione data in questo Articolo.

1394. Prob. Debbasi determinare il numero di tutte le combinazioni, che amettono alcune date cose combinate anche con se stesse secondo tutti gli esponenti, il massimo de' quali sia il numero delle cose date.

1395. Risol. Giusta le cose dette si trovino le espressioni dei numeri delle combinazioni secondo ciascun esponente, e la loro somma darà lo che si cerca. Per Esempio il numero di tutte le combinazioni di quattro cose secondo gli esponenti 2, 3, 4, sarà $4 \times \frac{\overline{4+1}}{2.} + 4 \times \frac{\overline{4+1} \times \overline{4+2}}{2. \quad 3.} + 4 \times \frac{\overline{4+1} \times \overline{4+2} \times \overline{4+3}}{2. \quad 3. \quad 4.}$
$= \frac{20}{2} + \frac{120}{6} + \frac{840}{24} = 65.$.

1396. Quanto al numero delle combinazioni secondo ciascun esponente ha luogo la regola generale data al num. 1305.

ARTICOLO IV.

Delle combinazioni, in cui si osserva il sito delle cose da combinarsi; e in oltre ciascuna cosa si combina con se stessa.

1397. IN questo Articolo si accoppia la dottrina data negli Articoli II. e III.

1398. Teor. 1. Il numero delle permutazioni di alcune date cose secondo l'esponente 2 è doppio del numero delle loro combinazioni secondo lo stesso esponente, escluse le combinazioni con se stesse.

1399. Dim. Per ragione del sito, o sia dell' ordine, ciascuna combinazione si deve ripetere tante volte, quanti sono i diversi modi, con cui si possono permutare le cose, che sono nella combinazione; ma la combinazione essendo secondo l' esponente 2 le cose non possono passare, che da destra a sinistra, o da sinistra a destra; dunque il numero delle permutazioni secondo l' esponente 2 di alcune date cose è doppio del numero delle loro combinazioni secondo lo stesso esponente. Lo che si doveva dimostrare.

1400. Teor. 2. Due cose combinate in tutti i modi possibili secondo l' esponente 2 ricevono quattro combinazioni.

1401. Dim. Due cose (pel num. 1376.) ricevono due permutazioni; e in oltre (pel num. 1386.) si possono combinare due volte con se stesse: Ma oltre queste no: possono darsi altre combinazioni secondo l'esponente 2. Dunque due cose non ammettono, che quattro combinazioni: E però le date cose essendo a, b, le combinazioni possibili saranno aa, ab, ba, bb.

1402. Corol. Il numero adunque di tutte le combinazioni possibili di due date cose secondo l'esponente 2 è il quadrato di 2 numero delle cose proposte.

1403. Ter. 3. Tre cose combinate in tutti i modi possibili secondo l'esponente 2 ricevono nove combinazioni.

1404. Dim. (Pel num. 1372.) tre cose combinate secondo il sito ricevono sei combinazioni; ma col combinarsi poi ciascuna di tali cose in se stessa ne risultano altre tre combinazioni (pel num. 1386.); dunque tre cose combinate in tutti i modi possibili secondo l'esponente 2 ricevono nove combinazioni. Lo che si doveva dimostrare.

1405. Corol. Il numero pertanto di tutte le combinazioni possibili, che secondo l'esponente 2 ammettono tre cose, è eguale al quadrato di tre, numero delle stesse cose.

1406. Teor. 4. Quattro cose combinate in tutti i modi possibili secondo l'esponente 2 ricevono sedici combinazioni.

1407. Dim. Quattro cose combinate secondo il sito ricevono (pel num. 1372.) dodici combinazioni; e combinate con se stesse ammettono (pel num. 1386.) quattro combinazioni; dunque quattro cose combinate in tutti i modi possibili ricevono sedici combinazioni. Lo che si doveva dimostrare.

1408. Corol. E però il numero di tutte le combinazioni possibili, che ammettono quattro cose secondo l'esponente 2, è eguale al quadrato del numero delle cose date.

1409. Collo stesso metodo procedendo si troverà, che cinque cose combinate in tutti i modi possibili secondo l'esponente 2 ricevono 25 combinazioni: Sei cose ne ricevono 36 ec. Onde ne nasce il seguente Teorema.

1410. Teor. 5. Il numero di tutte le combinazioni possibili di alcune date cose secondo l'esponente 2 è eguale al quadrato del numero delle cose date.

1411. Teor. 6. Tre cose combinate in tutti i modi possibili secondo l'esponente 3 ricevono 27. combinazioni.

1412. Dim. Tre cose secondo l'esponente 3 ricevono sei permutazioni (pel num. 1378.), e secondo lo stesso esponente combinate in se stesse ammettono tre combinazioni (pel num. 1386.): In oltre perchè (pel num. 1372.) tre cose secondo l'esponente 2 ricevono sei combinazioni, se in ciascuna di queste combinazioni si combinerà con se stessa ognuna delle date cose, onde avere le combinazioni secondo l'esponente 3, se ne avranno dodici combinazioni, che colle precedenti nove fanno 21, a cui aggiungendosi sei combinazioni, che nascono dall'interporsi a ciascuna delle combinazioni delle cose date in se stesse ognuna dell'altre due cose, ne risulteranno ventisette combinazioni, che sono tutte le possibili, che ammettono tre cose secondo l'esponente 3. Lo che si doveva dimost.

1413. Per Esempio tutte le combinazioni possibili di queste tre lettere *a*, *b*, *c* secondo l'esponente 3 saranno

abc	*cab*	*aab*	*caa*	*acc*	*cbb*	*aba*	*cac*	*aaa*
bac	*bca*	*baa*	*abb*	*cca*	*bcc*	*aca*	*bcb*	*bbb*
acb	*cba*	*aac*	*bba*	*bbc*	*ccb*	*bab*	*cbc*	*ccc*

1414. Corol. Il numero adunque di tutte le combinazioni possibili di alcune date cose secondo l'esponente 3 è eguale al cubo delle cose proposte.

1415. Colla stessa maniera proseguendo si trova, che essendo 4 l'esponente, il numero di tutte le combinazioni possibiil di alcune date cose sarà eguale al quadrato-quadrato del numero delle stesse cose. Se l'esponente sarà 5, sarà eguale alla quinta potestà ec.

1416. Corol. 1. Quindi essendo date alcune cose da combinarsi secondo un qualunque esponente, si avrà il numero di tutte le loro combinazioni possibili con innalzare il numero delle cose date alla potestà indicata dal proposto esponente.

1417. Corol. 2. Ora poichè gli esponenti delle combinazioni procedono secondo la serie naturale, i numeri di tutte le combinazioni possibili secondo ciascun' esponente formeranno una serie di tutte le potestà, cioè a dire (pel num. 1117.) una progressione geometrica, di cui saranno noti il primo termine, il secondo, e l'ultimo, mentre il primo termine è lo stesso numero delle cose date, il secondo è questo numero elevato al quadrato, l'ultimo è questo stesso numero elevato alla potestà indicata dal medesimo numero delle cose date: Onde essendo date alcune cose da combinarsi in tutte le varietà possibili, si avrà il numero di tutte queste combinazioni secondo ciascun' esponente giusta il num. 1067. Per Esempio se le cose da combinarsi saranno cinque, il numero di tutte le loro combinazioni possibili secondo ciascun' esponente sarà $\frac{5^{5+1}-5}{5-1} = \frac{5^6 = 5}{5-1} = \frac{15625 - 5}{5-1} = \frac{15620}{4}$ $= 3905.$

C A P O IX.

Della maniera di contare usata dai Romani, e dai Greci.

1418. Anticamente per contare si usavano i punti, ma per essere questi troppo piccoli venivano a cagionare confusione, per lo che si cominciarono ad allungare a foggia di linee così I, II, III ec. Ma perchè in questo modo era molesta assai la supputazione de' numeri maggiori per la moltiplicità delle linee, si determinarono finalmente certe note, o figure per rappresentare la forza del numero. I Romani si servivano delle seguenti cinque lettere.

I. uno.
V. cinque.
X. dieci.
L. cinquanta.
C. cento.

Queste lettere variamente combinate insieme arrivavano a esprimere almeno cento mila, come or ora vedremo: Se dovevano moltiplicare quest' ultima somma si servivano di avverbj.

Coll' andare del tempo per facilitare più il calcolo usarono le lettere dell' Alfabeto, assegnando a ciascuna il suo valore così. A = 500. B = 300. C = 100. D = 500. E = 250. F = 40. G = 400. H = 200. I = 1. K = 51. L = 50. M = 1000. N = 90. O = 11. P = 400. Q = 500. R = 80. S = 70. T = 160. Y = 150. X = 10. Z = 2000. Di presente però sono restate in uso solamente que-

queste sette lettere I, V, X, L, C, D, M, delle quali si suole diminuire il valore coll' anteporvi una lettera di minore significazione. Si usa ancora di porre il C, e l' M sopra il numero delle centinaja, e delle migliaja così:

$\overset{C}{IIII}$ = 400. $\overset{C}{VIII}$ = 800. $\overset{M}{IX.}$ = 9000. $\overset{M}{V}$ = 5000.

Ogniqualvolta a qualche lettera era soprapposta questa lineetta — dovevansi per lo più intendere tante migliaja, quante unità esprimeva tale lettera, così $\overline{A}$ = 500000. $\overline{B}$ = 300000. $\overline{C}$ = 100000. $\overline{M}$ = 1000000. ec.

L' I avanti a due, o più decine significava cento, così IXXVI = 126 IIXXXVIII = 238. ec. Beda si è servito di LXL in vece di 90. Alcuni hanno notato l' 80 così IIIIXX. Il 90 così IIIIXXX ec.

La maniera di contare dei Greci era poco diversa da quella de' Romani, e consisteva in sei lettere coll' ordine seguente.

I. uno.
Π. cinque.
Δ. dieci.
H. cento.
X. mille.
M. diecimilla.

Dalla combinazione di queste sei lettere eglino formavano tutte le loro cifre: Così per denotare 50 ponevano 𐅄, cioè cinque volte dieci, o dieci volte cinque. Per esprimere 500. scrivevano così 𐅅, cioè cinque volte cento. Per dire cinque mila scrivevano così 𐅆. Per esprimere 50000 facevano così 𐅇.

Questa fu la maniera più antica di contare appresso i Greci, come si ricava dalla cronica de' marmi di Paro: Ma ne' tempi posteriori si servirono delle lettere tanto majuscole, quanto correnti dell' Alfabeto, lo che hanno fatto pure gli Ebrei.

Ora esporrò quì in disteso tutta la maniera di contare dei Romani, e dei Greci. In mezzo collocherò le figure Arabiche, e a destra le corrispondenti figure Romane; ed a sinistra le figure Greche, che hanno lo stesso valore. Qualora occorreranno più figure diverse, che abbiano lo stesso valore, le collocherò tutte sotto una parentesi.

Figure Romane.	Arabiche.	Greche.
I.	1.	I.
II.	2.	II.
III.	3.	III.
IIII. } IV.	4.	IIII.
V.	5.	Π.
VI.	6.	ΠI.
VII.	7.	ΠII.
IIX. } VIII.	8.	ΠIII.

VIIII.

Figure Romane.	Arabiche.	Greche.
VIIII. IX.	9.	ΠIIII.
X.	10.	Δ.
XI.	11.	ΔI.
XII.	12.	ΔII.
XIII.	13.	ΔIII.
XIIII. XIV.	14.	ΔIIII.
XV.	15.	ΔΠ.
XVI.	16.	ΔΠI.
XVII.	17.	ΔΠII.
XIIX; IXIX; XVIII.	18.	ΔΠIII.
XVIIII. XIX.	19.	ΔΠIIII.
XX.	20.	ΔΔ.
XXIIX.	28.	ΔΔΠIII.
XXX. $^{X}X_{X}$. [illegible]. [illegible].	30.	ΔΔΔ.
XL. XXXX.	40.	ΔΔΔΔ.
XLVI. IVL.	46.	ΔΔΔΔΠI.
LXXX. XXC. $^{X}{}_{X}$C.	80.	$\overline{|\Delta|}$ΔΔΔ.
LXXXI. XXCI.	81.	$\overline{|\Delta|}$ΔΔΔI.

LXXXIX.

Figure Romane.	Arabiche.	Greche.
LXXXIX. IICIX.	89.	ΙΔΙΔΔΔΠΙΙΙΙ.
C.	100.	H.
IXX.	120.	HΔΔ.
CL.	150.	HΙΔΙ.
CXXC. CLXXX.	180.	HΙΔΙΔΔΔ.
IIC. CC. ꟿ.	200.	HH.
CCL.	250.	HHΙΔΙ.
CCC. IIIC.	300.	HHH.
CCCC. CD. IVC.	400.	HHHH.
IƆ. D. VC.	500.	ΙHΙ.
VIC. IƆC. DC.	600.	ΙHΙH.
CC ∞. IƆCCC. DCCC.	800.	ΙHΙHHH.
C ∞. CM. IƆCCCC. DCCCC.	900.	ΙHΙHHHH.
M. CIƆ. CLƆ. ∞. MS. MIL. Ī. CXƆ. IᴧI.	1000.	X.

Figure Romane.	Arabiche.	Greche.
8. $\overline{\mathrm{I}}$. I$\overline{\mathrm{XI}}$. ⋈. cIↄ. Ψ. ⅄.	1000.	X.
ML. M.L.	1050.	XI$\overline{\Delta}$I.
$\overline{\mathrm{II}}$. CIↄ CIↄ. MM. ∞ ∞.	2000.	XX.
$\overline{\mathrm{II}}$ CC.	2200.	XXHH.
CIↄ CIↄ CIↄ. M M M. $\overline{\mathrm{IIIM}}$ $\overline{\mathrm{III}}$. ∞ ∞ ∞.	3000.	XXX.
CIↄ CIↄ CIↄ CIↄ. M M M M. ∞ ∞ ∞ ∞. ∞ Iↄↄ. CIↄ Iↄↄ.	4000.	XXXX.
$\overline{\mathrm{V}}$. Iↄↄ. M M M M M. V ∞. $\overset{\mathrm{M}}{\mathrm{V}}$. I.ↄↄ. ICC. VCIↄ. VM. qↄ. Iↄↄ. L.	5000.	I$\overline{\mathrm{X}}$I.

Figure Romane.	Arabiche.	Greche.
Λ·	5000.	$\overline{\text{IXI}}$.
V·		
VI ∞.	6000.	$\overline{\text{IXI}}$X.
IƆƆ ∞.		
IƆƆ CIƆ.		
IƆƆ CIƆ CIƆ.	7000.	$\overline{\text{IXI}}$XX.
IƆƆ ∞ ∞.		
VII. ∞.		
CIƆ CIƆ CCIƆƆ.	8000.	$\overline{\text{IXI}}$XXX.
∞ ∞ CCIƆƆ.		
IƆƆ ∞ ∞ ∞.		
VIII ∞.		
∞ CCIƆƆ.	9000.	$\overline{\text{IXI}}$XXXX.
IƆƆ ∞ ∞ ∞ ∞.		
IX ∞.		
CIƆ CCIƆƆ.		
CXC.	10000.	M.
ÇC·I·ƆƆ.		
$\overline{\text{X}}$.		
$\overline{\text{X}}$·		
⁂ ⊥·		
CCICC.		
ƆMƆ.		
IMI.		
XM.		
CMƆ.		
ccIɔɔ.		
⊥·		
CCIƆƆ CIƆ.	11000.	MX.
ccIɔɔ ∞.		
CCIƆƆ. ∞.		
ccIɔɔ ∞ ∞.	12000.	MXX.
CCIƆƆ CIƆ CIƆ.		
CCIƆƆ CIƆ IƆƆ.	14000.	MXXXX.
CCIƆƆ ∞ IƆƆ.		
CCIƆƆ IƆƆ.	15000.	M$\overline{\text{IXI}}$.

Figure Romane.	Arabiche.	Greche.
CCIↃↃ IↃↃ IↃC.	15600.	M|X̄||H̄|H.
CCIↃↃ IↃↃ CIↃ. CCIↃↃ IↃↃ ∞.	16000.	M|X̄|X.
CCIↃↃ IↃↃ CIↃ CIↃ. CCIↃↃ IↃↃ ∞ ∞.	17000.	M|X̄|XX.
CCIↃↃ ∞ ∞ CCIↃↃ. CCIↃↃ CIↃ CIↃ CCIↃↃ.	18000.	M|X̄|XXX.
CCIↃↃ CIↃ CCIↃↃ. CCIↃↃ ∞ CCIↃↃ.	19000.	M|X̄|XXXX.
XX ∞. CCIↃↃ CCIↃↃ. X̄ M̄ X̄. ccIↄↄ ccIↄↄ. ↂ ↂ. ↂ ↂ. ↂ ↂ.	20000.	MM.
CCIↃↃ CCIↃↃ CIↃ. CIↃↃ CCIↃↃ ∞.	21000.	MMX.
CCIↃↃ CCIↃↃ CIↃ IↃↃ. CCIↃↃ CCIↃↃ ∞ IↃↃ.	24000.	MMXXX.
CCIↃↃ CCIↃↃ IↃↃ. XXVM.	25000.	MM|X̄|.
CCIↃↃ CCIↃↃ IↃↃ CIↃ. CCIↃↃ CCIↃↃ IↃↃ ∞.	26000.	MM|X̄|X.
CCIↃↃ CCIↃↃ CIↃ CIↃ CCIↃↃ. CCIↃↃ CCIↃↃ ∞ ∞ CCIↃↃ.	28000.	MM|X̄|XXX.
CCIↃↃ CCIↃↃ ∞ CCIↃↃ. CCIↃↃ CCIↃↃ CIↃ CCIↃↃ.	29000.	MM|X̄|XXXX.
XXX ∞. CCIↃↃ CCIↃↃ CCIↃↃ. XXX ↀ.	30000.	MMM.
CCIↃↃ CCIↃↃ CCIↃↃ IↃↃ.	35000.	MMM|X̄|.
CCIↃↃ IↃↃↃ. XL ↀ. XXXX ∞. CCIↃↃ CCIↃↃ CCIↃↃ CCIↃↃ.	40000.	MMMM.

CCIↃↃ

Figure Romane.	Arabiche.	Greche.
CCIↃↃ IↃↃↃ IↃↃ.	45000.	MMMM|X|.
IↃↃↃ. L ∞. DMIↃↃↃ. D ⁺. DↃↃ. L̄ L ⁺M ⁺. Ƭ Ƭ Ƭ Ƭ. IↃↃↃ. ⅅ.	50000.	|M|.
IↃↃↃ IↃↃ.	55000.	|M||X|.
IↃↃↃ CCIↃↃ. LXM.	60000.	|M| M.
IↃↃↃ CCIↃↃ IↃↃ.	65000.	|M| M |X|.
LXX ∞. IↃↃↃ CCIↃↃ CCIↃↃ. LXXM. IↃↃↃ ⁺CCIↃↃ CCIↃↃ.	70000.	|M| M M.
IↃↃↃ CCIↃↃ CCIↃↃ IↃↃ.	75000.	|M| M M |X|.
IↃↃↃ CCIↃↃ CCIↃↃ CCIↃↃ. LXXX ∞. CCIↃↃ CCIↃↃ CCCIↃↃↃ. X̄X̄C.	80000.	|M| M M M.
CCIↃↃ CCIↃↃ CCCIↃↃↃ IↃↃ.	85000.	|M| M M M |X|.
CCIↃↃ CCCIↃↃↃ. LXXX ∞; XC ∞ X̄C̄. ∞.	90000.	|M| M M M M.
C̄. C M ⁺. C ⁺ ML ⁺. C̄Ī.	100000.	P.

Figure Romane.	Arabiche.	Greche.
C*.		
+ C +.		
[illegible].		
[illegible].		
[illegible].	100000.	P.
[illegible].		
ȸ.		
[illegible].		
CCCIↃↃↃ.		
$\overline{CC}$.		
CC + MM +.	200000.	PP.
$\overline{\text{ꟿ}}$		
D +		
IↃↃↃↃ.		
DM*.	500000.	
qMD.		
qↃ.		
CMↃ.		
cqↃ.		
$\overline{M}$S.	1000000.	
$\overline{M}$M.		
CCCCIↃↃↃↃ.		
XMM.	10000000.	
CMM.	100000000.	

C A P O X.

Trattato delle Misure, e de' Pesi.

1418. La notizia dei Pesi, e delle Misure, che variano secondo i Paesi, anzi, che secondo i diversi tempi hanno anche variato nello stesso Paese, è sempre stata una cosa di somma importanza, mentre ignorata questa bisogna andar digiuno d'una buona parte di ciò, che forma l'Istoria tanto sacra, come profana de' Popoli. Il Matematico poi, cui molte volte tocca esaminare varie cose, che hanno relazione ai pesi, e alle Misure sì antiche, che moderne, deve averne in pronto, giacchè è impossibile averle tutte presenti alla memoria, un Catalogo, a cui

cui ricorrere ne' bisogni. Per tale motivo ho pensato non essere fuor di proposito il finire questo primo Tomo con un Trattato dei Pesi, e delle Misure sì antiche, che moderne delle primarie Capitali, lo che è appunto quanto può, e deve abbondantemente bastare. Siccome non abbiamo l'idea assoluta della quantità, quindi per determinare, o la durata del tempo, o la quantità dell' entrate, o la lunghezza del cammino, o la misura, e il peso delle merci nel Commercio, è stato d'uopo nelle differenti società degli uomini il fissare, e stabilire certe regole, o' sia certe misure invariabili in ciascuna spezie di quantità, le quali prese per l'unità di guida servissero a indagare, e scuoprire i rapporti dall' altre quantità omogenee tra loro, e con queste stesse misure. Ora queste misure invariabili stabilite variamente secondo le diverse Nazioni sono quelle appunto, di cui imprendo a trattare. E qui si osservi, che quando propongo di parlare delle Misure, per Esempio Francesi, Inglesi ec., intendo sempre delle Misure della Capitale, e delle altre misure del Regno, che con quelle della Capitale si uniformano. Per mettere la materia in tutto il lume possibile non solo parlerò dei Pesi, e delle Misure delle diverse principali Nazioni, e della proporzione, che in qualunque sito hanno osservato, e osservano fra loro questi Pesi, e queste Misure, ma in oltre ridurrò dipoi e gli uni, e le altre a una sola regola la più nota, e comune, che tale ho giudicato; e questa rispetto alle Misure tanto in lunghezza, come in superfizie, e in Capacità, sarà il Piede Reale di Parigi; rispetto poi ai Pesi ella sarà la libbra sottile di Venezia.

1419. Per non oscurare, e confondere una materia per se stessa intricatissima adoprerò i termini stessi usati dai diversi Popoli. In un Trattato tanto oscuro, e intralciato dopo avere esaminato con tutta esattezza i testimonj, e le ragioni di tanti, e fra loro discordi Autori sì antichi, che moderni, mi sono appigliato all' opinione più fondata circa ciascun peso, e misura. Tralascio di confermare co' testimonj de' più accreditati autori quanto ne esporrò, rimettendo intanto, chi vago ne fosse, alle Opere di Roberto Cenale (1), di Luca Peti (2), di Prisciano Cesariense (3), di Remnio Fannio (4), di Volusio Meciano (5), di Leonardo Porcio (6), di Giorgio Agricola (7), di Lodovico Calvis (8), di Michele Neandro (9), di M. Gaves (10), del D. Arbuthot (11), dei M. Arnaud, e Pelletier (12) ec. Divido in tre parti il presente Trattato: Nella prima parlo delle misure in lunghezza, e in superfizie; nella seconda delle Misure quanto alla capacità; nella terza de' Pesi, e delle Misure in ragione di Peso.

(1) De vera Mensurarum, & Ponderum ratione.
(2) De Mensuris, & Ponderibus romanis, & græcis.
(3) De Nummis, & Ponderibus.
(4) Carmen de Ponderibus, & Mensuris.
(5) Vocabula, ac notæ partium in rebus pecuniariis, Pondere, & Mensura.
(6) De Antiquorum Ponderibus, & Mensuris.
(7) De Ponderibus, & Mensuris.
(8) Resolutio labyrinthi monetarum, Ponderum &c.
(9) ΣΥΝΟΨΙΣ Mensorarum, & Ponderum &c.
(10) Trattato sul piede romano.
(11) De Ponderibus Dissertatio.
(12) Trattato sopra l'Hemina romana.

PAR-

PARTE PRIMA.

Delle Misure in Lunghezza, e Larghezza.

Delle Misure antiche Romane, Greche, e Ebraiche ec.

1420. POichè il piede regio di Parigi è una misura notissima a tutti, e già resa comune, però riferirò a questo piede tutte le misure in lunghezza, di cui tratterò. Se ne veda la di lui esatta misura nella Tavola posta al fine del Libro, essendosi a questo motivo fatto imprimere a Carta asciutta.

1421. *Delle Misure Romane antiche.*

	Stadj	Paſ.delm.	Grad.	Cubiti	Pal.pied.	Pied.	Spanne	Pal.min.	Oncie	Deti	Punti
Il Deto contiene	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	9
L' Oncia - - -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	$1\frac{1}{3}$	12
Il Palmo minore	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	3	4	36
Il Pal.mag. o Span.	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	3	9	12	108
Il Piede - - - -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	$1\frac{1}{3}$	4	12	16	144
Il Palmipiede -	- -	- -	- -	- -	- -	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{2}{3}$	5	15	20	180
Il Cubito - - -	- -	- -	- -	- -	$1\frac{1}{5}$	$1\frac{1}{2}$	2	6	18	24	216
Il Paſ. com. o grad.	- -	- -	- -	$1\frac{2}{3}$	2	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	10	30	40	360
Il Paſ. del Miglio	- -	- -	2	$3\frac{1}{3}$	4	5	$6\frac{2}{3}$	20	60	80	720
Lo Stadio - -	- -	125	250	$416\frac{2}{3}$	500	625	$833\frac{1}{3}$	2500	7500	ec.	
Il Miglio - - -	8	1000	ec.								

1422. Le stesse Misure ridotte al piede reale di Parigi.

	Piedi	Pollici	Linee
Il punto è - - - - - - - - - - - -			$\frac{203}{216}$
Il Deto - - - - - - - - - - - - -			$8\frac{11}{24}$
Oncia - - - - - - - - - - - - - -			$11\frac{5}{81}$
Palmo minore - - - - - - -		2	$9\frac{5}{6}$

Pal-

	Piedi	Pollici	Linee
Palmo maggiore - - - - -		8	5 $\frac{1}{2}$
Piede - - - - - - - - - -		11	3 $\frac{1}{3}$
Palmipiede - - - - -	1	2	1 $\frac{1}{6}$
Cubito - - - - - -	1	4	11
Passo comune - - - -	2	4	2 $\frac{1}{3}$
Passo del Miglio - -	4	8	4 $\frac{2}{3}$
Stadio - - - - - -	258	4	7 $\frac{1}{3}$
Miglio - - - - -	4699	0	10 $\frac{2}{3}$

Delle Misure Greche Antiche.

1423. La misura minore è il Dactylus, che è eguale alla larghezza del Deto.

	Pleth.	Arou.	Org.	Cub. reg.	Pecus	Pyg.	Cub.	Pie.	Spit.	Orth.	Lych.	P.gr.	Dor.	Det
Il Doron, o Palmo St. pic. cont. -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	4
Il grande -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	2 $\frac{1}{4}$	9.
Il Lychas -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	1 $\frac{1}{9}$	2 $\frac{1}{2}$	10.
L' Orthodoron -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	1 $\frac{1}{10}$	1 $\frac{2}{9}$	2 $\frac{3}{4}$	11.
Lo Spitame -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	1 $\frac{1}{11}$	1 $\frac{1}{5}$	1 $\frac{1}{3}$	3	12.
Il Piede -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	1 $\frac{1}{3}$	1 $\frac{5}{11}$	3 $\frac{3}{5}$	1 $\frac{7}{9}$	4	16.
Il Pygme, o Cubito -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	1 $\frac{1}{8}$	1 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{7}{11}$	1 $\frac{4}{5}$	2	4 $\frac{1}{2}$	18.
Il Pygon -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	1 $\frac{1}{9}$	1 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{2}{3}$	1 $\frac{9}{11}$	2	2 $\frac{2}{9}$	5	20.
Il Pecus, o gran Cub. -	- -	- -	- -	- -	- -	1 $\frac{1}{5}$	1 $\frac{1}{3}$	1 $\frac{1}{2}$	2	2 $\frac{2}{11}$	2 $\frac{2}{5}$	2 $\frac{2}{3}$	6	24
Il Cub. reg. -	- -	- -	- -	- -	1 $\frac{1}{8}$	1 $\frac{7}{20}$	1 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{11}{16}$	2 $\frac{1}{4}$	2 $\frac{5}{11}$	2 $\frac{7}{10}$	3	6 $\frac{3}{4}$	27.
L' Orgia, o passo -	- -	- -	- -	1 $\frac{5}{9}$	4	4 $\frac{4}{5}$	5 $\frac{1}{3}$	6	8	8 $\frac{8}{11}$	9 $\frac{3}{5}$	10 $\frac{2}{3}$	24	96.
L' Aroura -	- -	- -	8 $\frac{1}{3}$	27 $\frac{17}{27}$	33 $\frac{1}{3}$	40	41 $\frac{4}{9}$	50	66 $\frac{2}{3}$	70 $\frac{24}{33}$	80	88 $\frac{8}{9}$	200	ec
Il Plethron -	- -	2	16 $\frac{2}{3}$	59 $\frac{7}{27}$	66 $\frac{2}{3}$	80	88 $\frac{8}{9}$	100	ec.					
Lo Stadio -	6	12	100	ec.										
Il Miglio 10	60	120	ec.											

La

La Dieta, che appresso i Greci era il viaggio di un giorno, non si può accuraamente definire. Alcuni al riferire di Plinio nel lib. 7. Cap. 20. corsero in un giorno 1200. Stadii, come Anisto, e Filonide. Erodoto nel lib. 5. cap. 53. dice, che il viaggio di un giorno era di 250. Stadii. Comunemente però il viaggio di un giorno era di 210. Stadii, che è la distanza fra Atene, e Megara.

Il Diaulos conteneva due Stadii, o sia 1200 piedi greci, che sono piedi di Parigi 1131, pol. 8.

Il Dolichus conteneva dodici Stadii, o sia 7200 piedi greci, che sono piedi di Parigi 6790.

L'Hyppicon conteneva due Diaulos, o sia 2400 piedi greci, che sono piedi di Parigi 2263, pol. 4.

Lo Stathmus conteneva 120 Stadii, o sia 72000 piedi greci, che sono Piedi di Parigi 67900.

1424. *Le stesse Misure ridotte al piede reale di Parigi.*

	Piedi.	Pollici.	Linee.
Deto			$8\frac{39}{80}$
Doron il piccolo		2.	$9\frac{19}{20}$
il grande		6.	$4\frac{31}{80}$
Lychas		7.	$\frac{7}{8}$
Orthodoron		7.	$9\frac{29}{80}$
Spitame		8.	$5\frac{17}{20}$
Piede		11.	$3\frac{4}{5}$
Pygme	1.	0.	$8\frac{31}{40}$
Pygon	1.	2.	$1\frac{3}{4}$
Pecus	1.	4.	$11\frac{7}{10}$
Cubito regio	1.	7.	$1\frac{13}{80}$
Orgia	5.	7.	$10\frac{4}{5}$
Aroura	47.	1.	10.
Plethron	94.	3.	8.
Stadio	565.	10.	
Miglio	5648.	5.	

MI-

1425. *Delle Misure Ebraiche antiche.*

	Parf.	Viag. del Sab.	Cib.	St.	Canne	Tsead	Amahtophac	Ama.	Piedi	Zere.	Toph	Bohe.	Etsb. o De.
Il Bohen, o onc., o pol. cont. - -		- - -	- -	- -	- - -	- -	- - -	- -	- -	- -	- -	- -	$1\frac{1}{3}$
Il Tophac o pal. m. - - -		- - -	- -	- -	- - -	- -	- - -	- -	- -	- -	- -	3	4
Il Zereth o p. mag. - - -		- - -	- -	- -	- - -	- -	- - -	- -	- -	- -	3	9	12
Il Piede - - -		- - -	- -	- -	- - -	- -	- - -	- -	- -	$1\frac{1}{3}$	4	12	16
L'Amach o Astal, o Cubito - - -		- - -	- -	- -	- - -	- -	- - -	- -	$1\frac{1}{2}$	2	6	18	24
L'Amahtophac, o Cub. reg. - - -		- - -	- -	- -	- - -	- -	- - -	$1\frac{1}{6}$	$1\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{3}$	7	21	28
Il Tsead - - -		- - -	- -	- -	- - -	- -	$1\frac{3}{7}$	$1\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	10	30	40
La Cann. - - -		- - -	- -	- -	- - -	$3\frac{6}{10}$	$5\frac{1}{7}$	6	9	12	36	108	144
Lo Stadio - - -		- - -	- -	- -	$66\frac{2}{3}$	240	$342\frac{6}{7}$	400	600	800	2400	7200	ec.
Il Cibrath o migl. pi. - - -		- - -	- -	$2\frac{1}{2}$	$166\frac{2}{3}$	600	$857\frac{1}{7}$	1000	1500	2000	ec.		
Il Viagg. del Sabb. - - -		- - -	2	5	$333\frac{1}{3}$	1200	$1714\frac{2}{7}$	2000	3000	ec.			
Il Parsach o m. orie. - - -		2	4	10	$666\frac{2}{3}$	ec.							
Il Viagg. d'un gio.	$33\frac{7999}{12000}$	$67\frac{1999}{6000}$	ec.										

1426. *Le stesse Misure ridotte al piede reale di Parigi*

	Piedi	Pollici	Linee
Etsbea, o Deto			$9\frac{15}{16}$
Bohen, o oncia, o pollice		1.	$1\frac{1}{4}$
Tophac, o palmo minore		3.	$3\frac{3}{4}$
Zereth, o palmo maggiore		9.	$11\frac{1}{4}$
Piede	1.	1.	3

	Piedi	Pollici	Linee
Amach, o Aſtal, o Cubito - - -	1.	7.	10 $\frac{1}{2}$
Amahtophac, o cubito regio - - -	1.	1 1.	2 $\frac{1}{4}$
Tſead - - - - - - - -	2.	9.	1 $\frac{1}{2}$
Canna - - - - - - - -	9.	1 1.	3
Stadio - - - - - - -	6 6 2.	6.	0
Cibrath, o Miglio piccolo - -	1 6 5 6.	3.	0
Viaggio del Sabbato - -	3 3 1 2.	6.	0
Parſach, o Miglio orientale -	6 6 2 5.	0.	0
Viaggio di un giorno - -	2 2 3 0 4 1.	1.	4 $\frac{1}{2}$

1427. *Delle Miſure della S. Scrittura riferite al piede reale di Parigi.*

	Piedi	Pollici	Linee
Il Cubito ſecondo il Padre Calmet - -	1.	8.	6
ſecondo il Padre Merſenno -	1.	4.	5
La Verga d'Ezechiele - - - -	1 0.	2.	6 $\frac{3}{4}$
La Pertica - - - - - -	1 6.	3.	
Lo Schenus - - - - - -	1 3 6.	2.	6

Non è mancato chi, per iſpiegare facilmente alcuni paſſi della Scrittura, abbia inventato il Cubito ſacro eguale a due Cubiti comuni; ma tale Cubito non ha alcun fondamento preſſo gli antichi Scrittori.

La Stazione (detta Stathos dai Greci) degli Ebrei nel deſerto era di 9 Miglia.

1428. *Dell' altre Miſure antiche ridotte al piede reale di Parigi.*

	Piedi	Pollici	Linee
Palmo Aleſſandrino, Samio, e Bizantino - - -		3.	3 $\frac{2}{5}$
Piede - - - - - - -	1.	1.	2 $\frac{1}{5}$
Cubito - - - - - - -	1.	7.	9 $\frac{3}{5}$
Orgia - - - - - - -	6.	6.	1 $\frac{11}{25}$
Akena - - - - - -	1 1.		
Plethrum - - - - -	1 1 0.		
Stadio - - - - -	6 6 0.		
Miglio - - - - -	4 9 5 0.		
Schænus ſemplice - - -	1 9 8 0 0.		
doppio - - -	3 9 6 0 0.		

1429.

	Piedi	Pollici	Linee
1429. Il Palmo Babilonico		3.	1 $\frac{1}{8}$
Piede	1.	0.	4 $\frac{1}{2}$
Cubito	1.	6.	6 $\frac{3}{4}$
Stadio	618.	9.	
Schænus ſemplice	24062.	6.	
doppio	48125.		
1430. Il Palmo Antiocheno		3.	8 $\frac{22}{25}$
Piede	1.	2.	11 $\frac{13}{25}$
Cubito	1.	10.	5 $\frac{7}{25}$
Stadio	747.	1.	
Schænus ſemplice	22412.	6.	
doppio	44825.		
1431. Il Cubito d' Egitto	1.	7.	10 $\frac{1}{2}$
L' Orgia ſecondo Erodoto	5.	7.	10 $\frac{4}{5}$
Lo Stadio d' Egitto	565.	10.	0
Lo ſtadio ſecondo Erodoto	510.		
Lo ſcheno d' Egitto	18144.	0.	0

1432. *Piedi, e Cubiti, che hanno ſervito per la miſura delle Piramidi d'Egitto riferiti al piede reale di Parigi.*

		Piedi	Pollici	Linee
Piede	Secondo Erodoto		9.	9 $\frac{243}{800}$
Cubito	Secondo Erodoto	1.	2.	7 $\frac{191}{200}$
Piede	Secondo Diodoro		11.	2 $\frac{633}{700}$
Cubito	Secondo Diodoro	1.	4.	8 $\frac{3}{5}$
Piede	Secondo Strabone	1.	1.	1 $\frac{81}{200}$
Cubito	Secondo Strabone	1.	7.	7 $\frac{191}{150}$

1433. *Misure Itinerarie antiche riferite al piede reale di Parigi.*

	Piedi	Pollici	Linee
Piede Olimpico volgare - - - - - -		6.	6 $\frac{3}{10}$
Cubito - - - - - - - - -		9.	9 $\frac{5}{10}$
Stadio - - - - - - -	3 2 6.	6.	
Piede Olimpico sacro - - - - - -		6.	9 $\frac{3}{5}$
Cubito - - - - - - - - -		10.	2 $\frac{2}{5}$
Stadio - - - - - - -	3 4 0.	1.	
Piede Olimpico del Re - - - - -		7.	4 $\frac{1}{10}$
Cubito - - - - - - - - -		11.	$\frac{2}{10}$
Stadio - - - - - - -	3 6 7.	3.	9
Piede volgare - - - - - - -		8.	8 $\frac{2}{5}$
Cubito - - - - - - - -	1.	1.	$\frac{7}{10}$
Stadio - - - - - - -	4 3 6.	4.	
Piede volgare sacro - - - - -		9.	$\frac{4}{5}$
Cubito - - - - - - - -	1.	1.	7 $\frac{1}{5}$
Stadio - - - - - - -	4 5 3.	5.	8
Piede volgare del Re - - - - -		9.	9 $\frac{1}{2}$
Cubito - - - - - - - -	1.	2.	8 $\frac{3}{10}$
Stadio - - - - - - -	4 8 9.	9.	
Piede Pitio volgare - - - - -		10.	10 $\frac{3}{5}$
Cubito - - - - - - - -	1.	4.	3 $\frac{3}{10}$
Stadio - - - - - - - -	5 8.	2.	0
Piede Pitio sacro - - - - - -		11.	$\frac{2}{5}$
Cubito - - - - - - - -	1.	5.	$\frac{1}{192}$

Sta-

	Piedi	Pollici	Linee
Stadio - - - - - - - -	566.	10.	0
Piede Pitio del Re - - - - -	1.	0.	2 $\frac{9}{10}$
Cubito - - - - - - - - -	1.	6.	4 $\frac{3}{10}$
Stadio - - - - - - - -	612.	2.	3
Piede di Philetere volgare - - - -	1.	1.	7 $\frac{1}{5}$
Cubito - - - - - - - -	1.	7.	7 $\frac{4}{5}$
Stadio - - - - - - - -	653.	0.	0
Piede facro di Philetere - - - -	1.	1.	7 $\frac{1}{5}$
Cubito - - - - - - - -	1.	8.	4 $\frac{4}{5}$
Stadio - - - - - - - -	680.	2.	0
Piede di Philetere del Re - - - -	1.	2.	8 $\frac{1}{2}$
Cubito - - - - - - - -	1.	10.	$\frac{2}{5}$
Stadio - - - - - - - -	734.	7.	6

1434. *Misure Itinerarie greche degli Astronomi riferite al piede reale di Parigi.*

	Piedi	Pollici	Linee
Piede - - - - - - - - - -		6.	1 $\frac{9}{10}$
Cubito - - - - - - - - - -		9.	3 $\frac{1}{10}$
Orgia - - - - - - - - - -	3.	1.	$\frac{2}{5}$
Plethron - - - - - - - - -	51.	4.	4
Stadio - - - - - - - - -	308.	6.	11

1435. *Le stesse impiegate da Archimede, e Aristocreone nella misura della Terra.*

	Piedi	Pollici	Linee
Piede		8.	2 $\frac{7}{10}$
Cubito	1.	0.	4 $\frac{1}{10}$
Orgia	4	1.	4 $\frac{2}{5}$
Plethron	66.	8.	8 $\frac{4}{5}$
Stadio	411.	5.	4

1436.

1436. *Misure Olimpiche di Erodoto, e d' Eratostene impiegate nella misura della Terra.*

	Piedi	Pollici	Linee
Piede		9.	11 $\frac{3}{5}$
Cubito	1.	2.	11 $\frac{1}{2}$
Orgia	4.	11.	10
Plethron	83.	1.	1
Stadio	498.	7.	4

1437. *Misure Italiche di Columella, e Plinio.*

	Piedi	Pollici	Linee
Piede		11.	4 $\frac{3}{5}$
Cubito	1.	5.	1
Orgia	5.	8.	4
Plethron - - - - - - - - - - - - - -	94.	10.	4
Stadio - - - - - - - - - - - - - -	559.	5.	4

1438. *Misure Alessandrine di Tolomeo.*

	Piedi	Pollici	Linee
Piede - - - - - - - - - - - - - - -	1.	1.	8
Cubito	1.	8.	6
Orgia	6.	10.	.
Plethron	113.	10.	
Stadio	683.	4.	

1439. *Delle Misure geometriche antiche ridotte al piede reale di Parigi.*

	Piedi	Pollici	Linee
Il Cubito geometrico degli Ebrei - - -	9.	11.	3.
La Pertica - - - - - - - - - - - - -	79.	6.	0.
Lo Schænus linea misuratrice della Scrittura	795.	0.	10.
Il Cubito geometrico Romano - - - -	8.	5.	6.
Il Cubito maggiore. - - - - - - - - -	12.	8.	3.
La Decempeda - - - - - - - - - -	9.	4	9 $\frac{1}{3}$

1440. *Delle Misure superfiziali antiche ridotte al piede superfiziale di Parigi, ognuno de' quali contiene 144 pollici superfiziali, e ciascun pollice superfiziale 144 linee superfiziali.*

	Piedi	Pollici	Linee
L' oncia Romana superfiziale - - - - -			127 $\frac{61}{124}$
Il piede - - - - - - - - - - - - -		127.	27 $\frac{1}{9}$
La Pertica - - - - - - - - - - - - -	88.	46.	119 $\frac{1}{9}$
L'Atto minimo, che aveva 4 piedi in larghezza, e 120 in lunghezza, e però conteneva 480 piedi - - - - - - - - -	423.	138.	53 $\frac{1}{3}$

L'At-

	Piedi	Pollici	Linee
L' Atto quadrato, che aveva 120 piedi tanto in larghezza, come in lunghezza, e però conteneva 14400 piedi - - - - - -	12718.	719.	16
Lo Jugero era originariamente la quantità di terra, che in un giorno possono lavorare due Buoi, e conteneva 240 piedi in lunghezza, e 120 in larghezza, cioè 28800 piedi - - - - - - - - - - - - - -	25437.	94	32
Il Saltus conteneva 400 Jugeri - - - -	10175061.	104.	128
L' Aroura de' Greci, che conteneva 722 piedi, era - - - - - - - - - - - - -	642.	16.	$48\frac{2}{25}$
Il Plethron rustico secondo Svida era di 1444 piedi, e ne conteneva 38 per lato - -	1284.	32.	$96\frac{4}{25}$
Il Clima greco, che aveva 60 piedi tanto in larghezza, come in lunghezza, cioè 3600 piedi - - - - - - - - - - - - - -	3201.	97.	0
Il Versus aveva 100 piedi tanto in larghezza, come in lunghezza, cioè piedi 10000 -	8893.	77.	64
Il Tsemed degli Ebrei era eguale al Jugero Romano - - - - - - - - - - - -	24200.	0.	0
L' Aroura Egizia aveva 100 Cubiti per lato, e però conteneva 10000 Cubiti - - -	26767.	121.	64

Delle Misure moderne.

1441. *Delle Misure Romane riferite al piede Reale di Parigi.*

Il Palmo Romano de' Mercanti - - - - - - - - - - - 9: $2\frac{1}{4}$

La Canna - - - - - - - - - - - - - - 6: 1: 6.

1442. *Delle Misure Francesi.*

La ligne, o linea	Lieuë com.	Lieuë petite	Toises	Pas	Aunes	Pieds	Pouc.	Lign.	Points
contiene	. . . . .	. . . . .	. . . .	. .	. . . . . .	. .	. .	. .	10
Pouce	. . . . .	. . . . .	. . . .	. .	. . . . . .	. .	. .	12	120
Pied	. . . . .	. . . . .	. . . .	. .	. . . . . .	. .	12	144	1440
Aune	. . . . .	. . . . .	. . . .	. .	. . . . . .	$3\frac{23}{36}$	$43\frac{2}{3}$	524	5240
Pas	. . . . .	. . . . .	. . . .	. .	$1\frac{49}{131}$	5	60	720	7200
Toise	. . . . .	. . . . .	. . . .	$1\frac{1}{5}$	$1\frac{85}{131}$	6	72	364	8640
Lieuë petite	. . . . .	. . . . .	$1666\frac{2}{3}$	2000	$2748\frac{12}{131}$	ec.			
Lieuë commune	. . . . .	. . $1\frac{1}{4}$	$2083\frac{1}{3}$	2500	$3435\frac{15}{131}$	ec.			
Lieuë grande	$1\frac{1}{5}$	. . $1\frac{1}{2}$	2500	3000	$4122\frac{18}{131}$	ec.			

Il Passo di Parigi è lo stesso, che il passo geometrico.

Del-

1443. *Delle Misure Inglesi.*

L' Inch, o pollice	Furlong	Pace	Alla	Yard	Cubit	Foot	Span	Palm	Inch	Grani
contiene		..	..	..	..	..	..	....	..	3
Il Palm		..	..	..	..	..	..	....	3	9
Span		..	..	..	..	..	..	3	9	27
Foot, o piede		..	..	..	..	..	$1\frac{1}{3}$	4	12	36
Cubit		..	..	..	..	$1\frac{1}{2}$	2	6	18	54
Yard, o Canna		..	..	..	2	3	4	12	36	108
Alla, o braccio		..	..	$1\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	5	15	45	135
Pace, o passo		..	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{3}$	5	$6\frac{2}{3}$	20	60	180
Furlong, o Stadio		132	170	220	440	660	880	2640	7920	ec.
Mile	8	1056	1408	1760	3520	5280	7040	21120	ec.	

1444. *Le stesse Misure ridotte al piede reale di Parigi.*

	Piedi	Pollici	Linee
Grano			$3\frac{91}{125}$
Inch			$11\frac{23}{125}$
Palm		2.	$9\frac{67}{125}$
Span		8.	$4\frac{82}{125}$
Foot		11.	$2\frac{26}{125}$
Cubit	1.	4.	$9\frac{39}{125}$
Yard	2.	9.	$6\frac{78}{125}$
Alla	3.	5.	$11\frac{7}{25}$
Pace	4.	7.	$11\frac{1}{25}$
Furlong	615.	1.	$5\frac{7}{25}$
Mile	4920.	11.	$6\frac{6}{25}$

1445. *Delle misure Moscovite riferite al piede Reale di Parigi.*

L' Arcin		8.	1
Il Cubito	1.	4.	2
Il Fathom	6.	6.	$3\frac{57}{125}$
Il Wert	3262.	o.	o.

1446.

1446. *Delle Misure Persiane riferite al piede reale di Parigi.*

	Piedi	Pollici	Linee
La Gueze comune	1.	11.	2 $\frac{23}{30}$
La Gueze reale detta Monkelser	2.	10.	11 $\frac{1}{5}$
Lo Stadio	625.	0.	9
L'Arisch	2993.	5.	4 $\frac{16}{89}$
La Parasanga minore	18750.	0.	0
la comune	25000.	0.	0
la maggiore	31250.	0.	0

1447. *Delle Misure Arabiche riferite al piede reale di Parigi.*

L' Akdams, o piede	1.	8.	0.
Il Khatouat	5.	0.	0.
La Parasanga	60000.		

1448. *Delle Misure di Sian nell'Indie riferite al piede reale di Parigi.*

Il Niovs, o pollice			8 $\frac{3}{4}$
Il Keubi		8.	9.
Il Socki	1.	5.	6.
Il Ken	2.	11.	0.

1449. *Delle Misure Cinesi riferite al piede reale di Parigi.*

L'Hoe			$\frac{3}{31250}$
Su			$\frac{3}{3125}$
Hao			$\frac{6}{625}$
Li			$\frac{12}{125}$
Fuen			$\frac{24}{25}$
Gun, o sia oncia			9 $\frac{3}{5}$
Che, o sia Cubito		8.	0.
Pu, o passo	3.	4.	0.
Cham	6.	8.	0.
Pi	26.	8.	0.
Ly, o Stadio	1200.		
Pu	12000.		
Gan	96000.		

I Cubiti antichi, e in conseguenza i passi antichi sono più corti dei moderni di una quarta parte, per lo che 225 passi moderni ne fanno 300 degli antichi, e 120 Stadii moderni ne fanno 160 degli antichi, qualora però si misurino col Cubito degli Artefici, mentre vi sono due Cubiti, uno de' Fabri, e Artefici, l' altro de' Sarti, e venditori di Panni, e quest'ultimo è un poco maggiore dell'altro, poichè il Cubito de' Sartori nella Città Nan Cham, e Chan Chen della Provincia Chiemsi contiene un piede reale di Parigi, 1 pollice, e 7 linee: Nella Città di Nanchin contiene un piede reale di Parigi, un pollice, e una linea: Nella Città Hoay Ngan della Provincia Nanchin contiene 1 piede reale di Parigi, e 1 pollice. Il Cubito poi degli Artigiani contiene 1 piede reale di Parigi, e 6 linee.

Il Cubito Cinese antico ha subito diverse mutazioni sotto diversi Imperatori.

1450 *Tavola delle Misure di diversi luoghi riferite al piede Reale di Parigi.*

	Piedi.	Pollici.	Linee.
Piede d' Amsterdam		10:	$5\frac{3}{10}$
d' Ancona	1:	2:	$5\frac{1}{5}$
d' Anversa		10:	6
d' Argentina, o Strasburg Civile		8:	$8\frac{1}{5}$
d' Argentina, o Strasburg Rustico		10:	$3\frac{3}{5}$
d' Augusta		10:	$11\frac{3}{10}$
d' Avignon, e d' Aix		9:	9
d' Hamburg		10:	6
di Baviera		10:	8
di Besanzon nella Franca Contea.		11:	$5\frac{1}{5}$
di Bologna in Italia	1:	2:	$1\frac{4}{5}$
di Brescia	1:	5:	$\frac{4}{5}$
di Brema		10:	$7\frac{9}{10}$
di Brille	1:	0:	$2\frac{2}{5}$
di Brusselles		10:	$1\frac{9}{10}$
di Basilea		10:	$7\frac{7}{10}$
di Bassano	1:	1:	$8\frac{3}{10}$
di Bergamo	1:	3:	3
del Cairo in Egitto	1:	8:	6
di Colonia		10:	2

di

Piede	Piedi.	Pollici.	Linee.
di Copenaghen		10.	$9\frac{9}{10}$
di Cracovia	1.	1.	2
di Crema	1.	5.	3
di Cremona	1.	5.	9
di Costantinopoli	2.	0.	$2\frac{1}{2}$
di Danzica		10.	$4\frac{3}{5}$
di Danimarca		11.	$8\frac{3}{10}$
di Dijon		11.	$7\frac{1}{5}$
di Dola nella Franca Contea	1.	1.	$2\frac{3}{5}$
di Dordrecht		8.	$8\frac{1}{5}$
d' Egitto	1.	4.	0
di Ferrara	1.	3.	0
di Francfort al Meno		10.	6
di Bosco in Inghilterra	1.	5.	$\frac{2}{10}$
di Ginevra	1.	6.	$\frac{2}{5}$
di Genova		9.	3
di Granoble	1.	0.	$7\frac{1}{5}$
di Harlem		10.	$6\frac{7}{10}$
di Heidelberg		10.	$3\frac{3}{5}$
di Halla		11.	0
di Leiden		11.	$6\frac{1}{5}$
di Lipsia		11.	$7\frac{7}{10}$
di Lione	1.	0.	$7\frac{3}{5}$
della Lorena		10.	$9\frac{1}{5}$
di Lubecca		10.	6
di Liegi		10.	$7\frac{3}{5}$

Piede	Piedi.	Pollici.	Linee.
di Lovanio		9:	11 $\frac{1}{14}$
di Lisbona		10.	8 $\frac{7}{10}$
di Macedonia	1.	1.	$\frac{7}{10}$
di Macon in Borgogna	1.	0.	4 $\frac{3}{5}$
di Magonza		11.	1 $\frac{3}{5}$
di Malines		8.	5 $\frac{7}{10}$
di Mildeburg		11.	1 $\frac{4}{5}$
di Manheim		10.	8 $\frac{7}{10}$
di Mantova	1.	3.	6
di Monaco		8.	8 $\frac{1}{5}$
di Montpellier		8.	9
di Norimberga		11.	2 $\frac{3}{5}$
di Milano	1.	9.	6
di Napoli	1.	8.	7
di Padova	1.	0.	10 $\frac{1}{2}$
di Palermo		8.	5
di Parma	1.	7.	10
di Pavia	1.	5.	4
di Peſaro	1.	1.	1
di Piacenza	1.	6.	2 $\frac{3}{10}$
di Praga		11.	1 $\frac{4}{5}$
di Ravenna	1.	0.	4
del Reno		11.	6 $\frac{2}{5}$
di Reggio in Lombardia	1.	7.	6 $\frac{4}{5}$
di Riga		10.	6
di Rouen	1.	0.	0
di Roma ſul Monumento di Coſſuzio		10.	10 $\frac{1}{2}$
ſul Monumento di Statilio		10.	11 $\frac{1}{5}$

Pie-

	Piedi.	Pollici.	Linee.
Piede di Roma ſul Monumento di Villalpando		11.	$1\frac{4}{5}$
di Savoja		10.	0
di Sedan		10.	3
di Stetin	1.	1.	$9\frac{2}{5}$
di Spagna		11.	$3\frac{1}{8}$
di Svezia		11.	
di Toledo		10.	$3\frac{5}{7}$
di Torino	1.	7.	$2\frac{1}{5}$
di Trento per la pertica de' Terreni.	1.	1.	8
Per il paſſo Geometrico delle Muraglie	1.	0.	4
di Venezia	1.	0.	$6\frac{7}{10}$
di Verona	1.	0.	$6\frac{7}{10}$
di Vicenza	1.	0.	$10\frac{1}{2}$
di Vienna in Auſtria . . .		11.	7
di Vienna nel Delfinato . .		11.	11
d' Urbino	1.	1.	1

Si oſſervi, che una parte de' ſurriferiti piedi paſſano nei riſpettivi luoghi ſotto il nome di Braccio.

	Piedi.	Pollici.	Linee.
Il Braccio di Danzica, e di Lubecca.	1.	9.	$4\frac{1}{20}$
di Bergamo	1.	7.	6
di Bologna in Italia	1.	11.	7
di Firenze da panno . . .	1.	9.	$5\frac{1}{2}$
da Terra	1.	8.	$3\frac{1}{6}$
di Lucca	1.	9.	$10\frac{1}{2}$
di Livorno	1.	9.	$5\frac{1}{2}$
di Mantova	1.	5.	$1\frac{1}{2}$
di Modena da Tele . . .	1.	11.	7
da Legno . . .	1.	7.	$5\frac{1}{3}$

Brac-

	Piedi	Pollici	Linee
Braccio			
di Milano per i drappi di Seta	1.	6.	10 $\frac{2}{3}$
per i drappi di lana .	2.	0.	8 $\frac{1}{2}$
di Francfort	1.	8.	5
di Pisa da Panno	1.	9.	5 $\frac{1}{2}$
da Terra	1.	5.	10 $\frac{7}{12}$
di Siena comune . . .	1.	1.	11 $\frac{7}{10}$
per le Tele	1.	10.	2 $\frac{7}{10}$
di Riga	1.	8.	5 $\frac{19}{25}$
di Norimberga	2.	0.	4 $\frac{3}{5}$
di Ferrara per la lana . .	2.	0.	6 $\frac{2}{3}$
per la Seta . .	1.	11.	1 $\frac{1}{3}$
di Venezia per Panno, e Tela	2.	0.	10 $\frac{238}{569}$
per la seta . .	1.	10.	$\frac{52}{107}$
Il Cobre de' Cinesi	1.	1.	$\frac{1}{5}$
Il Cando del Pegu	1.	11.	3
Il Candi di Goa	38.	3.	0
La Vara d' Ormus, e di Goa . .	2.	6.	11 $\frac{1}{6}$
La Picca grande de' Turchi . . .	2.	0.	9
la piccola	1.	11.	5 $\frac{1}{2}$
Il Palmo di Marocco		7.	3 $\frac{1}{2}$
La Tesa di Lion	7.	6.	0
L'Aune di Lion	3.	7.	8 $\frac{3}{10}$
L' Alla d' Amsterdam	2.	1.	6 $\frac{1}{5}$
di Danimarca	1.	11.	4 $\frac{2}{5}$
d' Anversa	2.	1.	8 $\frac{1}{5}$
di Leiden	2.	1.	5 $\frac{1}{10}$

del-

	Piedi	Pollici	Linee
Braccio			
della Bretagna	4.	2.	11
di Fiandra	1.	1.	5 $\frac{1}{2}$
Il Raſo di Piemonte	1.	9.	10
La Vara d'Aragona	5.	5.	6
d'Almeria, e Gibilterra	2.	7.	$\frac{3}{5}$
di Lisbona	2.	6.	10 $\frac{1}{10}$
di Spagna	2.	6.	11 $\frac{1}{6}$
di Portogallo	3.	5.	7 $\frac{401}{901}$
Il Cabidos Portogheſe	2.	0.	11
La Canna di Sicilia	1.	9.	10
Il Palmo della Linguadocca		7.	9
La Canna di Lucca	7.	3.	6
di Montpellier, e della Linguadocca baſſa.	6.	0.	9
La Canna di Napoli	6.	10.	2
L'Aune di S. Genoux	3.	8.	4
L'Aune di Troyes, d'Arç, e d'alcune parti della Picardia, e della Borgogna . .	2.	5.	1
L'Arſchin della China	2.	0.	11
Il Palmo degli Architetti di Roma . .		8.	1 $\frac{4}{5}$
Lo Stajolo, con cui a Roma ſi miſurano i Campi	3.	10.	10 $\frac{7}{20}$
La Catena d'Inghilterra detta di Guntero	62.	7.	3 $\frac{3}{5}$
La Catena d'Inghilterra per le grandi diſtanze	94.	10.	4
La lunghezza del Pendolo, che batte i ſecondi nella latitudine di gradi 45. .	3.	0.	6 $\frac{9}{10}$
Il Piede Filoſofico è $\frac{1}{3}$ di un Pendolo, che batte i ſecondi nella latitudine di gradi 45.	1.	0.	2 $\frac{3}{10}$
La Gueze dell'Indie	2.	10.	5
In Inghilterra il piede Filoſofico ſi divide in 10 pollici, il pollice in 10 linee, e la linea in 10 Gry			
La Sagene de' Ruſſi.	78.	0.	0

1451 *Delle Pertiche di diversi Paesi riferite al piede reale di Parigi.*

	Piedi	Pollici	Linee
La Pertica d' Ancona	12.	7.	0
di Lucca	9.	1.	4 1/2
di Pisa } di Livorno }	8.	11.	3 1/2
Cavezzo di Bergamo	7.	0.	1 1/5
di Bologna in Italia	11.	8.	0
Cavezzo di Brescia	8.	6.	4 4/5
Trabucco di Crema	8.	7.	6
Cavezzo di Cremona	8.	10.	6
di Ferrara	12.	6.	0
di Firenze	10.	2.	3 1/5
di Lodi	8.	11.	
d' Inghilterra, e d' Olanda	15.	4.	6 54/125
d' Inghilterra per i legni di Bosco da tagliarsi	16.	9.	3 98/125
di Mantova	7.	9.	0
di Milano	21.	6.	0
di Modena	9.	8.	9
di Roma	7.	7.	0
di Parigi	18.	0.	0
di Parigi per i lavori reali	22.	0.	0
di Torino	9.	7.	1 1/5.
di Trento	6.	10.	0
di Vienna	5.	10.	0
di Verona	8.	4.	0
di Vicenza	6.	3.	4 1/5
di Parma	9.	11.	0
di Genova	9.	3.	0

1452. *Miglia di diverse Nazioni ridotte a piedi reali di Parigi.*

Miglio d' Italia	5000
d' Inghilterra	5454
d' Olanda	24000
di Moscovia	30000
di Polonia	18500
di Scozia	6000
delle Fiandre	20000
La Lega antica delle Gallie	7500
La Lega grande, o oraria di Francia	15000
la media	12000
la piccola	10000

la Ma-

	Piedi	Pollici	Linee
La Lega Marina	18815		
di Svezia	30000		
di Germania grande . .	25000		
la media . .	22500		
la piccola . .	20000		
di Spagna	17000		
di Turchia	5000		
L' Uchan de' Cinesi	75000		
La Cosa de' Gambarensi, e Guzaratensi	10000		
La Lega degli Svizzeri	25000		
La Lega di Sian detta Roe-Neug .	12000		

1453. *Delle Misure geometriche moderne superfiziali ridotte al piede reale superfiziale di Parigi.*

A Roma una Pezza contiene 529 Pertiche quadrate, cioè	30421.	25.	0.
Il Rubbio contiene 7 Pezze . . .	212947.	175.	0.
A Bologna la Pertica quadrata, o Tavola superfiziale è di 100. piedi quadrati	139.	6.	36.
La Tornatura contiene 144 Tavole superfiziali	22222.	36.	0.
La Biolca contiene 200 Tavole . . .	4444450.	0.	0.
A Modena la Tavola è di 4 Pertiche quadrate	378.	90.	36.
La Biolca è di 72 Tavole	27261.	18.	0.
A Milano una Zuccata quadrata forma la Tavola	462.	36.	0.
Una pertica superfiziale contiene 24 Tavole	11094.	0.	0.
A Ferrara lo staro è una superfizie di Terra, che ha di lunghezza Pertiche 33, piedi 3, oncie 4, e di larghezza pertiche 2, e però contiene pertiche quadrate 66. 6. 8. 0., o sia . . .	10319.	10.	95 $\frac{4}{9}$
Venti Stara fanno il Moggio, che ha di lunghezza Pertiche 666, piedi 6, oncie 8, e di larghezza Pertiche 2, e però contiene pertiche quadrate 1332$\frac{1}{3}$, cioè	206381.	69.	36. $\frac{8}{9}$
A Turino Piedi quadrati 36 fanno il Trabucco	92.	0.	1. $\frac{11}{25}$

	Piedi	Pollici	Linee
La Tavola contiene 4 Trabucchi . . .	368.	0.	5. $\frac{19}{25}$
Una giornata contiene 100 Tavole. .	36800.	4.	0.
A Mantova 4 Pertiche quadrate fanno la Tavola	240.	36.	0.
La Biolca contiene 100 Tavole . .	24025.	0.	0.
A Cremona Cavezzi quadrati 4 fanno la Tavola	315.	9.	16.
La Pertica superfiziale contiene 24 Tavole	7561.	74.	96.
A Crema la Tavola contiene 4 Trabucchi superfiziali	297.	81.	0.
La Pertica superfiziale contiene 24 Tavole	7141.	72.	0.
A Bergamo 4 Cavezzi superfiziali fanno la Tavola	196.	67.	34 $\frac{14}{25}$
La Pertica contiene 24 Tavole . .	4715.	29.	109 $\frac{11}{25}$
A Brescia 4 Cavezzi superfiziali fanno la Tavola	291.	39.	5 $\frac{19}{25}$
La Pertica superfiziale contiene 25. Tavole	7281.	112.	0.
Il Prò, o sia Jugero contiene 4 Pertiche	29127.	16.	0.
A Venezia 25 piedi quadrati fanno la Tavola	27.	54.	114 $\frac{1}{4}$
A Padova 36 piedi superfiziali fanno la Tavola	41.	63.	81.
Il Campo contiene 840 Tavole . .	34810.	112.	73.
A Vicenza 36 piedi superfiziali fanno la Tavola	41.	63.	81.
Il Campo contiene 840 Tavole . .	34810.	112.	73.
A Verona 36 piedi superfiziali fanno la Tavola	39.	61.	89.
La Vaneza contiene 30 Tavole . .	1182.	120.	78.
Vaneze 24 fanno un Campo . .	28388.	13.	0.
A Firenze il Pugnoro contiene 12 braccia quadre	34.	21.	82 $\frac{5}{9}$
La Canna superfiziale contiene 3. Pugnori .	102.	64.	103 $\frac{2}{3}$
Il Panoro è di 4 Canne superfiziali . .	409.	114.	126 $\frac{2}{3}$
Lo Stioro contiene 12 Panori . .	4977.	82.	92
A Lucca 25 braccia quadrate fanno la pertica, o tavola quadra . .	83.	10.	128 $\frac{1}{4}$
Il Quartiero contiene 115 pertiche, o Tavole quadre	9553.	100.	60 $\frac{3}{4}$

La

	Piedi	Pollici	Linee
La coltra contiene 4 Quartieri . . .	38213.	113.	99.
A Genova Palmi quadrati 432 fanno la Tavola	256.	99.	0.
Il Yard superficiale Inglese contiene 6 piedi quadri Inglesi	5.	57.	69 $\frac{9}{25}$
Il Paces contiene 25 piedi quadri . .	22.	71.	73.
La Poles contiene $\frac{1}{4}$ Yard . . .	163.	46.	117 $\frac{17}{50}$
Il Rood contiene 40 Poles	6533.	0.	85 $\frac{3}{5}$
L' Acre contiene 4 Rood	26132.	2.	54 $\frac{2}{5}$
L' Oxgang contiene 15 Acre . .	391980.	35.	96.
L' Hide è tanta terra, quanta si può arare ogni anno con un Aratro. L' Antica Hide era fissata a 120 Acre .	47037629.	104.	0.
Il Girib, che è la sola misura superfiziale de' Persiani è	9025.	39.	10.

PARTE SECONDA.

Misure vacue, o sia di Capacita'.

1454. Le misure vacue si dividono appresso qualunque Nazione in due sorti: Altre sono quelle, che servono per misurare i liquidi, come vino, olio ec. altre sono quelle, che servono per misurare le cose secche, come frumento, legumi ec.

Delle Misure vacue Antiche.

1455. *Delle Misure vacue Romane pei liquidi.*

Il Cyathus, o bicchiere contiene	Amphor	Urnæ	Congi	Sexta.	Heminæ	Quar.	Acetabu.	Cyat.	Ligule, o Cuchiari
Il Cyathus, o bicchiere contiene		. .	. .	. .	. . . .	. .	. . . .	. .	4
L' Acetabulum		. .	. .	. .	. . . .	. .	. . . .	1 $\frac{1}{2}$	6
Il Quartarius		. .	. .	. .	. . . .	. .	2	3	12
L' Hemina, o Cotyle		. .	. .	. .	. . . .	2	4	6	24
Il Sextarius		. .	. .	. .	2	4	8	12	48
Il Congius, o Chus		. .	. .	6	12	24	48	72	288
L' Urna		. .	.4	24	48	96	192	288	1152
L' Amphora, o Cadus, o Quadrantal, o Metrete		2	8	48	96	192	384	576	2304
Il Culeus	20	40	160	960	1920	3840	7680	ec.	

Il Sextario Castrense era doppio del Sextario di Città.

 1456.

1456. *Delle Misure Vacue Romane per gli Aridi.*

	Semimodj	Seftarj	Hemine	Acetab.	Cyathi	Ligule
Il Cyathus contiene						4
L' Acetabulum					1 $\frac{1}{2}$	6
L' Hemina				4	6	24
Il Sextarius			2	8	12	48
Il Semimodius		8	16	64	95	384
Il Modius	2	16	32	128	192	768

Le Note, con cui i Romani marcavano queste Misure, si vedano nella Tavola posta al fine del libro.

1457. *Delle Misure vacue Attiche pei Liquidi.*

	Chos	Xestes	Coty.	Hemic.	Oxy.	Cyat.	Conc.	Myst.	Che.	Cocl.
La Cheme contiene										2
Il Mystron									1 $\frac{1}{4}$	2 $\frac{1}{2}$
La Conca								2	2 $\frac{1}{2}$	5
Il Cyathus							2	4	5	10
L' Oxybaphon						1 $\frac{1}{2}$	3	6	7 $\frac{1}{2}$	15
L' Hemicotylion					2	3	6	12	15	30
La Cotyle, o Tribilium				2	4	6	12	24	30	60
Il Xestes			2	4	8	12	24	48	60	120
Il Chos, o Chœus		6	12	24	48	72	144	288	360	720
Il Ceramium, o Metretes	12	72	144	288	576	864	1728	3456	4320	8640

1458. *Delle Misure Vacue Attiche per gli aridi.*

	Choenix	Xestes	Coty.	Oxybaphon	Cyat.	Cocliarion
Il Cyathus contiene						10
L' Oxybaphon					1 $\frac{1}{2}$	15
La Cotyle				4	6	60
Il Xestes			2	8	12	120
La Chœnix		1 $\frac{1}{2}$	3	12	18	180
Il Medimnus	48	72	144	576	864	8640

1459.

1459. *Delle Misure vacue Attiche rustiche pei liquidi.*

	Semime.	Tertiari	Sexta.	Semisextarj	Chænix	Coty.	Oxy.	Cyat.	Myst.
Il Cyathus contiene	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	4
L'Oxybaphon	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	$1\frac{1}{2}$	6
La Cotyle	- -	- -	- -	- -	- -	- -	4	6	24
La Chœnix	- -	- -	- -	- -	- -	3	12	18	72
Il Semisextarius	- -	- -	- -	- -	4	12	48	72	288
Il Sextarius	- -	- -	- -	2	8	24	96	144	576
Il Tertiarius	- -	- -	2	4	16	48	192	288	1152
Il Semimedimnus	- -	$1\frac{1}{2}$	3	6	24	72	288	432	1728
Il Medimnus	2	3	6	12	48	144	576	864	3456

1460. *Delle Misure vacue Attiche rustiche per gli Aridi.*

	Amphore	Chus	Cotyle	Oxybaph	Cyathi	Mystra
Il Cyathus contiene	.	. .	. . .	. . .	. .	4.
L'Oxybaphon	.	. .	. . .	. . .	$1\frac{1}{2}$	6.
La Cotyle	.	. .	. . .	4.	6.	24.
Il Chus	.	. .	12.	48.	72.	288.
L'Amphora	.	4.	48.	192.	288.	1152.
Il Metretes	2.	8.	96.	384.	576.	2304.

Le Note, con cui i Greci marcavano le loro Misure, si vedano nella Tavola posta al fine del libro.

1461. *Delle Misure vacue degli Ebrei pei liquidi.*

	Bath	Seah	Hin	Cab	Log	Caph
Il Log contiene	.	. .	. .	. .	. .	$1\frac{1}{3}$
Il Cab	.	. .	. .	. .	4.	$5\frac{1}{3}$
L' Hin	.	. .	. .	3.	12.	16.
Il Seah, o Satum	.	. .	2.	6.	24.	32.
Il Bath, o Epha	.	3.	6.	18	72.	96.
Il Coron, o Chomer, o Corus	10.	30.	60.	180.	720.	960.

1462. *Delle Misure vacue sacre pei liquidi.*

Il Bath, o Epha sacro ne conteneva uno, e mezzo volgare; e parimente il Corus sacro ne conteneva uno, e mezzo volgare.
Il Dolium sesquiculeare conteneva 3 Corus.

La

La Conca di Bronzo conteneva Bath $2 \frac{1}{4}$
Il Mare di Bronzo conteneva 2000 Bath.

1463. *Delle Misure vacue degli Ebrei per gli Aridi.*

	Lettech	Epha	Seah	Gomor	Cab	Gachal
Il Cab contiene		. .	. .	. .	. .	20.
Il Gomor, o Assaron		. .	. .	. .	$1 \frac{4}{5}$	36.
Il Seah, o Satum		. .	. .	$3 \frac{1}{3}$	6.	120.
L'Epha, o Cadus, o Vadus secondo S. Girolamo		. .	3.	10.	18.	360.
Il Lettech . :		5.	15.	50.	90.	1800.
Il Chomer	2	10.	30.	100.	180.	3600.

1464. *Delle Misure vacue sacre per gli Aridi.*

La Misura del Pane di Proposizione era $\frac{1}{5}$ di Gomor
Il Modulo delle Primizie conteneva 3 Seah, o sia un Epha

1465. *Delle Misure vacue Egizie.*

	Aporrhyma	Œphin	Inium
L'Œphin contiene		. .	8.
L' Aporrhyma		$1 \frac{3}{8}$	11.
L'Artaba	$8 \frac{8}{11}$	12.	96.

Alcuni vogliono, che l'Alabastrum, di cui si parla in S. Matteo al Capo 26. vers. 7., fosse una misura Egiziana, che contenesse la quantità del peso di una libbra Egiziana.

1466. *Delle Misure vacue Sirie.*

	Collathum	Sabitha	Chœnix
La Sabitha		. .	$4 \frac{4}{5}$
Il Collathum		$1 \frac{3}{22}$	$5 \frac{5}{11}$
Il Metrete	$5 \frac{1}{2}$	$6 \frac{1}{4}$	30.

1467.

1467. *Delle Misure vacue Persiane.*

	Artaba mag.	Artaba min.	Capitha
L' Artaba minore contiene	. . . . .	. . . .	24
L' Artaba maggiore	. . . . . .	$1 \frac{1}{16}$	$25 \frac{1}{2}$
L' Achana ; che serviva pel frumento	. . $42 \frac{6}{17}$	45	1080.

Delle Misure vacue degli Arabi.

	Sohcin	Missi.	Kist.	Corb.	Keiliati.	Kasfuf.	Cuath.	Falgerin.
Il Cauthum, o Briaala contiene	.	.	.	.	.	.	.	4.
Il Kasfuf, o Anecsune, o Acsasse		.	.	.	.	.	$1 \frac{1}{2}$	6.
Il Keiliati, o Calix	. . . . . .	.	.	.	.	2.	3.	12.
Il Corboni, o Helimena, o Phyala		.	.	.	2.	4.	6.	24.
Il Kist acsat, o Aben enib	. . .	.	.	2.	4.	8.	12.	48.
Il Missichaus	. . . .	.	3.	6.	12.	24.	36.	144.
Il Sohcin	. . . .	2.	6.	12.	24.	48.	72.	288.
Il Dorach	 8	16.	48.	96.	192.	384.	576.	2304.

1469. Per osservare l' uniformità nel ragguaglio delle Misure io determinerò la capacità delle surriferite Misure vacue in Piedi, pollici, e linee cube del Piede Reale di Parigi. Già per le cose dette, ove si è trattato delle Potestà, si sa che cosa è un piede cubo, un pollice cubo ec.; per lo che vi vogliono 1728 linee cube a fare un Pollice cubo, e 1728 pollici cubi a fare un piede cubo.

1470 *Delle Misure vacue Romane pei Liquidi.*

	Piedi cubi.	Pollici cubi.	Linee cube.
La Ligula	. . . .		$1113 \frac{200065523}{203036072}$
Cyathus	. . . .	2.	$99 \frac{47792219}{50757768}$
Acetabulum	. . . .	3.	$1271 \frac{13953707}{16919256}$
Quartarius	. . . .	7.	$815 \frac{5494079}{8459628}$
Hemina	. . . .	14.	$1631 \frac{1264265}{4229814}$
Sextarius	. . . .	29.	$1534 \frac{1264265}{2114907}$
Congius	. . . .	179.	$577 \frac{413623}{704969}$
Urna	. . . .	717.	$582 \frac{244554}{704979}$

Am-

	Piedi cubi.	Pollici cubi.	Linee cube.
Amphora		1434.	$1164\frac{489108}{704969}$
Culeus	16.	1045.	$829\frac{617563}{704969}$

1471 *Delle Misure vacue Romane per gli Aridi.*

	Piedi cubi.	Pollici cubi.	Linee cube.
La Ligula			$1113\frac{200065523}{203031072}$
Cyathus		2.	$999\frac{47792219}{50757768}$
Acetabulum		3.	$1271\frac{13953707}{16919256}$
Hemina		14.	$1631\frac{1264265}{4229814}$
Sextarius		29.	$1534\frac{1264265}{2114907}$
Semimodius		239.	$180\frac{1654492}{2114907}$
Modius		478.	$361\frac{1194077}{2114907}$

1472. *Delle Misure vacue Attiche pei liquidi.*

	Piedi cubi.	Pollici cubi.	Linee cube.
Il Cocliarion			$322\frac{784427641}{991155360}$
Cheme			$645\frac{288849961}{495577680}$
Mystron			$806\frac{387965497}{396462144}$
Concha			$1613\frac{189734425}{198231072}$
Cyathus		1.	$1499\frac{90618889}{99115536}$
Oxybaphon		2.	$1385\frac{57580377}{66077024}$
Hemicotylion		5.	$1043\frac{24541865}{33038512}$
Cotyle		11.	$359\frac{8022609}{16519256}$
Xestes		22.	$718\frac{8022609}{8259628}$
Chos		134.	$857\frac{3418757}{4129814}$
Ceramium		1613.	$1653\frac{1928379}{2064907}$

1473

1473. *Delle Miſure vacue Attiche per gli Aridi.*

	Piedi cubi	Pollici cubi	Linee cube
Il Cocliarion			322 784427641/991155360
Cyathus		1.	1499 90618889/99115536
Oxybaphon		2.	1385 57580377/66077024
Cotyle		11.	359 8022609/16519256
Xeſtes		22.	718 8022609/8259628
Chœnix		33.	1078 7548571/16519256
Medimnus		1613.	1653 1928379/2064907

1474. *Delle Miſure vacue Attiche ruſtiche pei liquidi.*

	Pollici cubi	Linee cube
Il Myſtrum		806 387065407/390452144
Cyathus	1.	1499 90618889/99115536
Oxybaphon	2.	1385 57580377/66077024
Cotyle	11.	359 8012609/16519256
Chœnix	33.	1078 7548572/16519256
Semiſextarius	134.	857 3419757/4129814
Sextarius	268.	1715 1353850/2064907
Tertiarius	537.	1703 641703/2064907
Semimedimnus	806.	1690 1996643/2064907
Medimnus	1613.	1653 1928379/2064907

1475. *Delle Miſure vacue Attiche ruſtiche per gli Aridi.*

	Pollici cubi	Linee cube
Il Myſtrum		806 387065407/390452144
Cyathus	1.	1499 90618889/99115536
Oxybaphon	2.	1385 57580377/66077024

	Piedi cubi	Pollici cubi	Linee cube
Cotyle		11.	359 $\frac{8012600}{16510256}$
Chus		134.	857 $\frac{3418757}{4120814}$
Amphora		537.	1703 $\frac{641793}{2064007}$
Metretes		1075.	1678 $\frac{1285586}{2064007}$

1476. *Delle Misure vacue degli Ebrei pei Liquidi.*

	Piedi cubi	Pollici cubi	Linee cube
Il Caph		14.	1632 $\frac{786487}{11279504}$
Log		19.	1600 $\frac{224188}{704969}$
Cab		79.	1216 $\frac{407152}{704969}$
Hin		239.	193 $\frac{81518}{704969}$
Seah		478.	388 $\frac{163036}{704969}$
Bath, o Epha		1434.	429 $\frac{241323}{704969}$
Coron, o Corus, o Chomer	8.	522.	1278 $\frac{661766}{704969}$

1477. *Delle Misure vacue sacre pei Liquidi.*

	Piedi cubi	Pollici cubi	Linee cube
L'Epha sacra	1.	523.	644 $\frac{14500}{704969}$
Corus sacro	12.	784.	190 $\frac{186930}{704969}$
Dolium sesquiculeare	24.	1568.	380 $\frac{573860}{704969}$
Conca di Bronzo	1.	1499.	92 $\frac{14250}{704969}$
Mare di Bronzo	1660.	16.	1312 $\frac{658400}{704969}$

1478. *Delle Misure vacue degli Ebrei per gli Aridi.*

	Piedi cubi	Pollici cubi	Linee cube
Il Gachal		3.	1702 $\frac{387418}{704969}$
Cab		79.	1216 $\frac{407152}{704969}$
Gomor		143.	807 $\frac{354853}{3524845}$
Seah		478.	388 $\frac{163036}{704969}$

Epha

	Piedi cubi	Pollici cubi	Linee cube
Epha		1434.	429 $\frac{241323}{704969}$
Lettech	4.	261.	639 $\frac{330633}{704969}$
Chomer	8.	522.	1278 $\frac{661266}{704969}$

1479. *Delle Misure vacue Sacre per gli Aridi.*

	Piedi cubi	Pollici cubi	Linee cube
La Misura del Pane di Proposizione		28.	1198 $\frac{3879698}{17624225}$
Il Modulo delle Primizie		1434.	429 $\frac{241323}{704969}$

1480. *Delle Misure vacue Egizie.*

	Piedi cubi	Pollici cubi	Linee cube
L' Inium		29.	1534 $\frac{1264265}{2114907}$
Œphin		239.	180 $\frac{1654492}{2114907}$
Aporrhyma		328.	1328 $\frac{1217473}{2114907}$
Artaba	1	1141.	441 $\frac{819741}{2114907}$

1481. *Delle Misure vacue Siric.*

	Piedi cubi	Pollici cubi	Linee cube
La Chœnix		119.	954 $\frac{827246}{2114907}$
Sabitha		573.	1398 $\frac{1009911}{2114907}$
Collathum		652.	652 $\frac{20026062}{23263977}$
Metrete	2	130.	178 $\frac{1553403}{2114907}$

1482. *Delle Misure vacue Persiane.*

	Piedi cubi	Pollici cubi	Linee cube
La Capitha		67.	428 $\frac{7548571}{8259628}$
Artaba minore		1613.	1653 $\frac{1928379}{2064907}$
Artaba maggiore		1714.	1433 $\frac{5024303}{16519256}$
Achana	42	52.	123 $\frac{50961}{2064907}$

1483. *Delle Misure vacue degli Arabi.*

	Piedi cubi	Pollici cubi	Linee cube
Il Falgerin - - - - - - - - -			1113 $\frac{100065513}{101031072}$
Cuathum - - - - - - -		2.	999 $\frac{47791119}{50757768}$
Kasfuf - - - - - - - - -		3.	1271 $\frac{13053707}{16919156}$
Keiliati - - - - - - - -		7.	815 $\frac{5494270}{8459518}$
Corboni - - - - - - - -		14.	1631 $\frac{1264265}{4219824}$
Kift - - - - - - - - - -		29.	1534 $\frac{1264265}{2114907}$
Miffichaus - - - - - - - -		89.	1152 $\frac{1118501}{1409938}$
Sohcin - - - - - - - -		179.	577 $\frac{413613}{704969}$
Dorach - - - - - - - -		1434.	1164 $\frac{489108}{704969}$

1484. *Appresso gli Scrittori si trovano ancora le seguenti altre Misure vacue degli Arabi.*

	Piedi cubi	Pollici cubi	Linee cube Secchj V.
Il Myftrum minore - - - - - -		1.	499 $\frac{98540987}{101515536}$
Gabenum - - - - - - - -		3.	1271 $\frac{13951707}{16919155}$
Myftrum maggiore - - - - - -		19.	1599 $\frac{1264265}{4114907}$
Dadix - - - - - - - - -		201.	1286 $\frac{6126457}{8159628}$
Hydria - - - - - - - - -		298.	1523 $\frac{2068115}{2114907}$
Campiaces - - - - - - - -		358.	1134 $\frac{36631}{2114907}$
Cophinus - - - - - - - - -		538.	4 $\frac{535900}{704969}$
Mares - - - - - - - - -		597.	1319 $\frac{2088383}{2114907}$
Cyprus Ponticus - - - - - - -		956.	723 $\frac{271247}{2114907}$
Cyprus - - - - - - - - -		1613.	1653 $\frac{1918379}{2064907}$

DEL-

Delle Misure vacue moderne.

1485. *Delle Misure vacue Romane pei liquidi.*

	Brente	Barili	Congi	Rubli	Boccali	Fojette
Il Boccale contiene	- -	- -	- -	- -	- -	4
Rublo	- -	- -	- -	- -	$7\frac{1}{2}$	30
Congio	- -	- -	- -	$1\frac{1}{15}$	8	32
Barile	- -	- -	4	$4\frac{4}{15}$	32	128
Brenta	- -	$3\frac{21}{128}$	$12\ \frac{21}{32}$	$13\frac{1}{2}$	$101\ \frac{1}{4}$	405
Botte	$2\ \frac{214}{405}$	8	32	$34\frac{2}{15}$	256	1024

1486 *Delle Misure vacue di Venezia pei Liquidi.*

	Bigonci	Mastelli	Secchj	Bozze	Boccali
La Bozza contiene	. .	. .	. .	. .	$1\frac{1}{16}$
Secchio	. .	. .	. .	4.	$4\frac{1}{4}$
Mastello	. .	. .	7.	28.	$29\frac{3}{4}$
Bigoncio	. .	2.	14.	56.	$59\frac{1}{2}$
Anfora	4.	8.	56.	224.	238

1487 *Delle Misure vacue di Venezia per gli Aridi.*

	Stara	Quarte	Quartieri
La Quarta contiene	.	.	4.
Staro	.	4.	16.
Sacco	$1\frac{1}{2}$	6.	24.

1488. *Delle Misure vacue di Modena pei Liquidi.*

	Sogli	Paroli	Pinte	Boccali
La Pinta contiene	.	.	.	2.
Parolo	.	.	$3\frac{3}{4}$	$7\frac{1}{2}$
Soglio	.	6.	$22\frac{1}{2}$	45.
Quartaro	2.	12.	45.	90.

1489.

1489. *Delle Misure vacue di Modena per gli Aridi.*

	Staj	Mine	Quarte
La Quarta contiene	.	.	4.
Stajo	.	2.	8.
Sacco	2.	4.	16.

1490. *Delle Misure vacue di Firenze pei Liquidi.*

	Barili	Fiaschi
Il Barile contiene	.	20.
Stajo	3.	60.

1491. *Delle Misure vacue di Brescia pei Liquidi.*

	Zerle	Secchie	Pinte	Boccali
La Pinta contiene				2.
Secchia	.	.	9.	18.
Zerla	.	4.	36.	72.
Carro	12.	48.	432.	864.

1492. *Delle Misure vacue di Verona pei Liquidi.*

	Brente	Baſſe	Secchie	Inguiſtare
La Secchia contiene	.	.		18.
Baſſa	.		3.	54.
Brenta	.	1 $\frac{1}{3}$	4.	72.
Botte	12.	16.	48.	864.

1493. *Delle Misure vacue di Vicenza pei Liquidi.*

	Maſtelli	Secchj	Inguiſt.	Mezze	Gotti
La Mezza contiene	.	.	.	.	2.
Inguiſtara	.	.	.	2.	4.
Secchio	.	.	10.	20.	40.
Maſtello	.	12.	120.	240.	480.
Botte	8.	96.	960.	1920.	3840.

1494. *Delle Misure vacue di Bologna per gli Aridi.*

	Corbe	Stara	Quartirole	Quartiroli	Quarticini
Il Quartirolo contiene	.	.	.	.	8.
La Quartirola	.	.	.	4.	32.
Lo Staro	.	.	2.	8.	64.
La Corba	.	2.	4.	16.	128.
Il Sacco	3.	6.	12.	48.	384.

1495.

1495. *Delle Misure vacue Francesi pei liquidi.*

Il Poisson è di 6 pollici cubi, e 1728 pollici cubi fanno il piede cubo

	Pipes	Muids	Barils	Septiers	Quarteaux	Pintes	Chopines	Poissons
La Chopine - - - -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	4
La Pinte - - - - - -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	2	8
Il Quarteau - - - - -	- -	- -	- -	- -	- -	2	4	16
Il Septier di stima - - -	- -	- -	- -	- -	4	8	16	64
Il Baril - - - - - -	- -	- -	- -	27	108	216	432	1728
Il Muid - - - - - -	- -	- -	$1\frac{1}{3}$	35	144	288	576	2304
La Pipe - - - - - - -		$1\frac{1}{2}$	2	54	216	432	864	3456
Il Tonneau - - - - -	2	3	4	108	432	864	1728	6912

L' oncia d' acqua a Parigi, che dalle Fontane, o Macchine scaricasi in un momento, è di Pinte 14.

1496. *Delle Misure vacue Francesi per gli Aridi.*

Il Litron è di 36 pollici cubi

	Septiers	Mines	Minots	Boisseaux	Demi-Boisseaux	Quartier de Bois.	Demi-quartier de Boisseau	Litrons
Il Demi-quart. de Boisseau		- -	- -	- -	- -	- -	- - -	2
Quartier de Boisseau		- -	- -	- -	- -	- -	2	4
Demi-Boisseau - -		- -	- -	- -	- -	2	4	8
Boisseau - - - -		- -	- -	- -	2	4	8	16
Minot - - - -		- -	- -	3	6	12	24	48
Mine - - - - - -		- -	2	6	12	24	48	96
Septier - - - -		2	4	12	24	48	95	192
Muid - - - -	12	24	48	144	288	576	1152	2304

Le Misure per l' Avena sono il doppio delle sopra accennate. Il Boisseau per l' Avena (che è doppio di quello per gli altri grani) è diviso in 4 Picotins, e il Picotin in 4 Litrons

1497. *Misure di diversi generi riferite al Boisseau.*

	Boisseaux
Per il Sale il Minot contiene - - - - - - -	4.
Il Septier - - - - - - - -	6.
Pel Carbone il Minot - - - - - - - -	8.
La Mine - - - - - - - -	16.
Il Muid - - - - - - - -	320.
Per la Calcina il Minot - - - - - - - -	3.
Il Muid - - - - - - - -	48.

Per

	Boisseaux
Per il Gesso il Sacco	12.
Il Muid	432.
Per il Legname il Minot	8.
La Mine	16.
Il Muid	320.

1498. *Delle Misure vacue Inglesi per la Cervogia*

	Baril	Kild	Firkins	Gallon	Pinch
Il Gallon contiene	- -	- -	- -	- -	8
Firkins	- -	- -	- -	8	64
Kild	- -	- -	2	16	128
Baril	- -	2	4	32	256
Hogsehad	2	4	8	64	512

1499. *Delle Misure vacue Inglesi per la Birra.*

	Baril	Kild	Firkins	Gallon	Pinch
Il Gallon contiene	- -	- -	- -	- -	8
Firkins	- -	- -		9	72
Kild	- -		2	18	144
Baril		2	4	36	288
Hogsehad	2	4	8	72	576

1500. *Delle Misure vacue Inglesi pel Vino.*

	Brett	Punc.	Hogseh.	Tier.	Barr.	Rundlet	Gall.	Pottl.	Quar.	Pinch
La Quart contiene	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	2
Pottle	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	2	4
Gallon	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	2	4	8
Rundlet	- -	- -	- -	- -	- -	- -	18	36	72	144
Barrel	- -	- -	- -	- -	- -	$1\frac{3}{4}$	$31\frac{1}{2}$	63	25	252
Tierce	- -	- -	- -	- -	$1\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{3}$	42	84	168	336
Hogsehad	- -	- -	- -	$1\frac{1}{2}$	2	$3\frac{1}{2}$	63	126	252	504
Punchion	- -	- -	$1\frac{1}{3}$	2	$2\frac{2}{3}$	$4\frac{2}{3}$	84	168	336	672
Brett	- -	$1\frac{1}{2}$	2	3	4	7	126	252	504	1008
Tun	2	3	4	6	8	14	252	504	1008	2016

1501.

1501. *Delle Misure vacue Inglesi per gli Aridi.*

	Way	Seam	Carnock	Strike	Bushel	Peck	Gallon	Pinch
Il Gallon contiene	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	8
Peck	- -	- -	- -	- -	- -	- -	2	16
Bushel	- -	- -	- -	- -	- -	4	8	64
Strike	- -	- -	- -	- -	2	8	16	128
Carnock, o Comb	- -	- -	- -	2	4	16	32	256
Seam	- -	- -	2	4	8	32	64	512
Way	- -	6	12	24	48	192	384	3072
Last	$1\frac{2}{3}$	10	20	40	80	320	640	5120

1502. *Delle Misure vacue Olandesi pei Liquidi.*

	Awn	Anker	Stekan	Viertel	Mengle	Pinte	Mustias
La Pinta contiene	- -	- -	- -	- -	- -	- -	4
Mengle	- -	- -	- -	- -	- -	2	8
Viertel	- -	- -	- -	- -	$5\frac{1}{6}$	$10\frac{1}{3}$	$41\frac{1}{3}$
Stekan	- -	- -	- -	$3\frac{3}{31}$	16	32	128
Anker	- -	- -	2	$6\frac{6}{31}$	32	64	256
Awn	- -	4	8	$24\frac{24}{31}$	128	256	1024
La Tonellata d'Amsterdam	6	24	48	$148\frac{20}{31}$	768	1536	6144

1503. *Delle Misure vacue Olandesi per gli Aridi.*

	Mude	Schepel	Vierdevat	Kops
Il Vierdevat contiene	- -	- -	- -	4
Schepel	- -	- -	4	16
Mude	- -	4	16	64
Lest, o Last	27	108	432	1728

1504. *Delle Misure vacue Spagnuole pei liquidi.*

	Robas	Azumbres	Quarte
L'Azumbres contiene	- -	- -	4
L'Arroba, o Robas	- -	8	32
La Botte	30	240	960

1505. *Delle Misure vacue Spagnuole per gli Aridi.*

	Cahi	Anegras
Il Cahi contiene	- -	12
Fanegas	4	48

1506. *Delle Misure vacue Portoghesi pei liquidi.*

	Almundes	Alquier	Cavedos	Quart.
Il Cavedos contiene	-	- -	- -	4
L'Alquier	-	- -	6	24
Almunde	-	2	12	48
Botte	26	52	312	1248

1507. *Delle Misure vacue Portoghesi per gli Aridi.*

	Fanegos	Alequier
Il Fanegos contiene		4.
Il Moggio	15.	60.

Le stesse Misure ridotte a Piedi, Pollici cubi, e Linee cube.

1508. *Delle moderne Misure vacue Romane pei Liquidi.*

	Piedi cubi	Pollici cubi	Linee cube
La Fojetta contiene		12.	$3\frac{1}{4}$
Boccale		48.	13
Rublo		360.	$97\frac{1}{2}$
Congio		384.	104
Barile		1536.	416
Brenta	2.	1404.	$1316\frac{1}{4}$
Botte	7.	193.	1600

1509 *Delle Misure vacue di Venezia pei Liquidi.*

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cub.
Il Boccale è		68.	$7\frac{31}{119}$
Bozza		72.	$423\frac{5}{7}$
Secchio		289.	$30\frac{6}{7}$
Mastello	1.	295.	216
Bigoncio	2.	590.	432
Anfora	9.	633.	0

1510.

1510. *Delle Misure vacue di Venezia per gli Aridi.*

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cub.
Il Quartiere è		233.	$314 \frac{21}{88}$
Quarta		932.	$1256 \frac{21}{22}$
Staro	2.	284.	$1571 \frac{9}{11}$
Sacco	3.	412.	$629 \frac{8}{11}$

1511. *Delle Misure vacue di Modena pei Liquidi.*

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cub.
Il Boccale è		56.	$987 \frac{3}{7}$
Pinta		113.	$246 \frac{6}{7}$
Parolo		424.	$493 \frac{5}{7}$
Soglio	1.	817.	$1234 \frac{2}{7}$
Quartaro	2.	1635.	$740 \frac{4}{7}$

1512. *Delle Misure vacue di Modena per gli Aridi.*

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cub.
La Quarta è		403.	$747 \frac{31}{224}$
Mina		1613.	$1260 \frac{31}{56}$
Stajo	1.	1499.	$793 \frac{3}{28}$
Sacco	3.	1270.	$1586 \frac{3}{14}$

1513. *Delle Misure vacue di Firenze.*

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cub.
Il Fiasco è		48.	0.
Barile		960.	0.
Stajo	1.	1152.	0.

1514. *Delle Misure vacue di Brescia.*

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cub.
Il Boccale è		90.	1560.
Pinta		181.	1392.
Secchia		1636.	432.
Zerla	3.	1361.	0.
Carro	45.	780.	0.

1515. *Delle Misure vacue di Verona.*

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cub.
L' Inguistara è		53.	136.
Secchia		955.	720.
Bassa	1.	1138.	432.
Brenta	2.	365.	1152.
Botte	26.	932.	0.

1516. *Delle Misure vacue di Vicenza.*

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cub.
Il Gotto è		18.	$1320\frac{3}{10}$
Mezza		37.	$912\frac{3}{5}$
Inguistara		75.	$97\frac{1}{5}$
Secchio		750.	972
Mastello	5.	366.	1296
Botte	41.	1206.	0

1517. *Delle Misure vacue di Bologna per gli Aridi.*

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cub.
Il Quarticino è		32.	$563\frac{111}{118}$
Quartirolo		258.	$1054\frac{15}{16}$
Quartirola		1034.	$763\frac{3}{4}$
Staro	1.	340.	$1527\frac{1}{2}$
Corba	2.	681.	1327
Sacco	7.	317.	525

1518.

1518. *Delle Misure vacue Francesi pei Liquidi.*

	Piedi cubi	Pollici cubi	Linee cube
Il Poisson contiene		6.	
Chopine		24.	
Pinte		48.	
Quarteau		96.	
Septier		384.	
Baril	6.	0.	
Muid	8.	0.	
Pipe	12.	0.	
Tonneau	24.		

1519. *Delle Misure vacue Francesi per gli Aridi.*

	Piedi cubi	Pollici cubi	Linee cube
Il Litron contiene		36.	
Demi-Quarrier de Boisseau		72.	
Quartier de Boisseau		144.	
Demi-Boisseau		288.	
Boisseau		576.	
Minot	1.	0.	
Mine	2.	0.	
Septier	4.	0.	
Muid	48.	0.	

1520. *Misure di diversi generi.*

	Piedi cubi	Pollici cubi	Linee cube
Per il Sale il Minot è	1.	576.	
Il Septier	2.	0.	
Pel Carbone il Minot	2.	1152.	
La Mine	5.	576.	
Il Muid	106	1152.	
Per la Calcina il Minot	1.	0.	
Il Muid	16.	0.	
Per il Gesso il Sacco	4.	0.	
Il Muid	144.	0.	
Per il Legname il Minot	2.	1152.	
La Mine	5.	576.	
Il Muid	106.	1152.	

1521.

1521. *Delle Misure vacue Inglesi per la Cervogia.*

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cubiche
Il Pinch è		24.	
Gallon		192.	
Firkins		1536.	
Kild	1.	1344.	
Baril	3.	960.	
Hogsehad	7.	191.	

1522. *Delle Misure vacue Inglesi per la Birra.*

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cubiche
Il Pinch è		31	510 $\frac{1600}{4500}$
Gallon		250	627 $\frac{23}{1125}$
Firkins	1.	525	459 $\frac{23}{125}$
Kild	2.	1050	918 $\frac{46}{125}$
Baril	5.	373	108 $\frac{92}{125}$
Hogsehad	10.	746	217 $\frac{50}{125}$

1523. *Delle Misure vacue Inglesi pel Vino.*

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cubiche
Il Pinch è		26	1575 $\frac{9}{125}$
Quart		53	1422 $\frac{18}{125}$
Pottle		107	1116 $\frac{36}{245}$
Gallon		215	504 $\frac{72}{125}$
Rundlet	2	419	442 $\frac{46}{125}$
Barret	3	1597	1206 $\frac{18}{125}$
Tierce	5	402	456 $\frac{24}{125}$
Hogsehad	7	1467	684 $\frac{36}{125}$
Punchion	10	804	912 $\frac{48}{125}$
Brett	15	1206	1368 $\frac{72}{125}$
Tun	31	685	1009 $\frac{19}{125}$

1524. *Delle Misure vacue Inglesi per gli Aridi.*

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cubiche
Il Pinch è		31	$731 \frac{1480}{7625}$
Gallon		251	$666 \frac{4662}{7625}$
Peck		502	$1333 \frac{2660}{7625}$
Bushel	1	283	$148 \frac{6788}{7625}$
Strike	2	566	$297 \frac{5067}{7625}$
Carnock	4	1132	$595 \frac{4109}{7625}$
Seam	9	536	$1191 \frac{993}{7625}$
Way	55	1492	$234 \frac{5958}{7625}$
Last	93	182	$1543 \frac{1305}{7625}$

1524. *Delle Misure vacue Olandesi pei Liquidi.*

	Piedi cubici	Pollici cubici
Il Mustias è		12
Pinta		48
Mengle		95
Viertel		495
Stekan		1536
Anker	1	1344
Awn	7	192
Tonellata	42	1152

1526. *Delle Misure vacue Olandesi per gli Aridi.*

	Piedi cubici	Pollici cubici
Il Kops è		76
Vierdevat		304
Schepel		1216
Mude	2	1408
Last	76	

1527. *Delle Misure vacue Spagnole pei Liquidi.*

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cubiche
La Quarta è		57	1026
Azumbras		230	648
Robas	1	115	
Botte	31	1722	

1528.

1528. *Delle Misure vacue Spagnuole per gli Aridi.*

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cubiche
L' Anegras è	2.	192.	
Cahi	25.	576.	
Fanegas	101.	576.	

1529. *Delle Misure vacue Portoghesi pei liquidi.*

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cubiche
La Quartas è		24.	
Cavedos		96.	
Alquier		576.	
Almundes		1152.	
Botte	17.	176.	

1530. *Delle Misuse vacue Portoghesi per gli Aridi.*

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cubiche
L' Alquier è		547.	573 $\frac{2}{5}$
Fanegas	1.	460.	1494 $\frac{3}{5}$
Moggio	19.	0.	1680.

1531. *Rapporto di altre Misure vacue pei liquidi di diversi Paesi al piede cubico, pollice ec.*

	Piedi cubici	Pollici cubici
La Demi-Queüe a Rouen	18.	0.
Demi-Queüe di Sciampagna	5.	576.
Queüe d' Orleans	12.	0.
Botte d' Orleans	16.	0.
Pinte di S. Dionigi		96.
Pipe nell' Anjou, e nel Poëtu	12.	0.
Migliarole di Provenza	1.	1440.
Poincon di Nantes	7.	728.
Botte d' Amsterdam per l' Olio	44.	768.
Viertel d' Amsterdam pel Vino		576.
Botte di Bajona	24.	0.
Barique di Bourdeaux	12.	1536.
Salma di Calabria	8.	1536.
Foeder di Heidelberga	8.	768.
Moggio di Linguadocca	2.	576.
Tonellata di Malaga	8.	768.
Lo Staro di Calabria	0.	1536.
Feoder di Norimberga	8.	768.
Conca di Bajona	2.	192.
Canan di Sian		96.
Lenig di Sian		24.
Veggia d' Argentina	32.	482.

Bren-

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cubiche
Brenta di Crema	1.	283.	
Botte d'Alicante	32.	768.	
Pipe d'Alicante	19.	806.	
Il Pignatoli di Calabria		48.	

1532. *Rapporto di altre Misure vacue per gli Aridi di diversi Paesi al piede cubico, pollice ec.*

Il Boisseau d'Amboise, e Turs è		27.	21.
Boisseau di Blois		16.	691.
Boisseau di Bourdeaux		162.	
Boisseau d'Avignon		49.	373.
Boisseau della Rocella		195.	108 $\frac{5}{16}$
Mine a Rouen	1.	576.	0.
Mine a Dieppe	2.	192.	0.
Moggio d'Orleans	10.	0.	0.
Septier a Rouen	4.	0.	0.
Septier di Tolon	2.	0.	0.
Chaldron di Londra	41.	1551.	144.
Last di Polonia	80.	0.	0.
Last di Prussia	532.	0.	0.
Chefford di Moscovia		1152.	0.
Viertel d'Anversa	2.	584.	1488 $\frac{48}{65}$
Scheppel, o Scheffel d'Hamburg		1459.	0.
Last d'Hamburg	82.	576.	0.
Sestiere d'Amiens		1440.	691 $\frac{1}{5}$
Last d'Anversa	76.	0.	0.
Fanegos di Cadice, e di S. Sebastiano	1.	428.	967 $\frac{17}{25}$
Sac di Dordrecht	3.	288.	
Sac di Leyden	1.	1256.	
Sestiere di Liegi		1368.	
Mude di Louvain	2.	1408.	
Carica di Marsiglia	4.	384.	
Sestiere di Montpellier	1.	704.	
Tonneau di Nantes	78.	0.	
Carro di Napoli	48.	1152.	
Salma di Palermo	7.	497.	
Tonneau della Rocella	36.	256.	
Sac di Roterdam	2.	1072.	
Muid di Rouen	56.	0.	
Carica di Toulon	12.	0.	
Stajo di Livorno		1163.	
Stajo di Lucca		1103.	
Tomolo di Napoli	1.	576.	
Queue di Borgogna	72.	0.	
Botte di Brest	40.	0.	
Tonne di Coppenhagen	1.	1398.	

	Piedi cubici	Pollici cubici	Linee cubiche
Sacco di Crema - - - -	5.	274.	
Laſt di Danzica - - - - -	7.	1036.	
Baziere di Dunkerque - -	4.	384.	
Mudde di Francfort - - -	2.	1408.	
Carica di Genova - - -	3.	69.	
Sacco di Granata - - -	2.	921.	
Sac di Harlem - - - -	2.	0.	
Quarteau d'Irlanda - - -	7.	716.	
Aſnée di Lione - - - -	5.	576.	
Scheppel di Lubecca - - -		1382.	
Carica di Marſiglia - - -	4.	364.	
Sac di Middelburg - - -	1.	1362.	
Mouver di Nimega - - -	3.	854.	
Septier di Narbona - - -	1.	1582.	
Loopen di Riga - - - -	1.	1127.	
Stajo di Sardegna - - -	1.	576.	
Tonne di Stokolm - - -	3.	526.	
Sacco di Valenza - - -	2.	864.	
Mudda di Utrecht - - -	3.	69.	
Laſt d'Amſterdam per la Marina -	64.	69.	207 $\frac{9}{25}$
Piquet d'Amiens - - -		360.	0
Botte d'Amſterdam per l'Olio -	44.	768.	0
Il Tomolo di Palermo - -		787.	108
Il Mondili di Palermo - - -		196.	1323

PAR-

PARTE TERZA.

Dei Pesi, e delle Misure in ragione di peso

Dei Pesi antichi.

1533. Giusta il metodo fin' ora tenuto parleremo primieramente dei Pesi antichi, poscia passeremo ai moderni.

1534. *Dei Pesi antichi dei Romani.*

	Dupond.	Libbre	Oncie	Sicilici	Denari	Dramme	Victor.	Scropoli	Sexter.	Quadr.	Minuti
Il Grano d'orzo, o Quadrante pesa	. . .	. .	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	. .	. .	2
Sextertius . . .	. . .	. .	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	.	2	4
Scropolo	. . .	. .	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	$1\frac{1}{6}$	$2\frac{1}{3}$	$4\frac{2}{3}$
Victoriatus, o Assario	. . .	. .	. .	. .	. .	. . .	. .	$1\frac{5}{7}$	2	4	8
Dramma	. . .	. .	. .	. .	. .	. . .	$1\frac{3}{4}$	3	$3\frac{1}{2}$	7	14
Denarius Argenteus	. . .	. .	. .	. .	. .	$1\frac{1}{7}$	2	$3\frac{3}{7}$	4	8	16
Sicilicus, o Siciliente	. . .	. .	. .	. .	$1\frac{3}{4}$	2	$3\frac{1}{2}$	6	7	14	28
Oncia	. . .	. .	. .	4	7	8	14	24	28	56	112
Libbra, o Asse .	. . .	. .	12	48	84	96	168	288	336	672	1344
Dupondium . . .	. . .	2	24	96	168	192	336	576	672	1344	2688
Sextertium . . .	$1\frac{41}{84}$	$2\frac{41}{42}$	$35\frac{5}{7}$	$142\frac{6}{7}$	250	$285\frac{5}{7}$	500	$857\frac{1}{7}$	1000	2000	4000

Le Note, con cui i Romani marcavano i loro pesi, si vedano nella Tavola posta al fine del libro

La divisione della libbra anticamente era tutta in ragion di peso, poichè tanto appresso i Romani, come appresso l' altre Nazioni, non si numeravano, ma si pesavano i denari, non essendosi peranche introdotto l' uso di segnare il Metallo.

L'Asse, che si è valutato una libbra, non è stato sempre dello stesso peso. Ne' diversi tempi della Repubblica è stato di differenti materie, e però di differenti pesi. Sotto Tullo Hostilio cominciò a essere di rame, e del peso di una libbra, e si chiamava As, libra, libella; Dopo 420 anni, essendo stato votato l'Erario pubblico in occasione della prima Guerra Punica, fu ridotto l' Asse a 2 Oncie. Dipoi oppressi i Romani da Annibale nella seconda Guerra Punica fu abbassato l' Asse al valore di un'oncia: Finalmente per la legge Papiria fu ridotto a mezz' oncia nell' anno di Roma 563, e questo Asse durò tutto il tempo della Repubblica fino a Vespasiano, e fu chiamato Asse Papiriano

Alcuni pretendono, che sotto ai Cesari si sia diminuito il peso del denaro d'argento, e si sia ridotto eguale alla dramma, così che 8 denari facessero l'oncia Romana. Questo poi era il denaro, che in tributo si pagava dalle soggiogate Nazioni.

1535. *Divisione della libbra nelle sue parti.*

		Oncie.
1	As	12.
$\frac{11}{12}$	Deunx	11.
$\frac{5}{6}$	Dextans	10.
$\frac{3}{4}$	Dodrans	9.
$\frac{2}{3}$	Bes	8.
$\frac{7}{12}$	Septunx	7.
$\frac{1}{2}$	Semis	6.
$\frac{5}{12}$	Quincunx	5.
$\frac{1}{3}$	Triens	4.
$\frac{1}{4}$	Quadrans	3.
$\frac{6}{1}$	Sextans	2.
$\frac{1}{12}$	Uncia	1.

1536.

1536. *Dei Pesi antichi de' Greci.*

	Cæcrop.	Mna n.	Libbr.	Mna v.	Oncie	Tetradr.	Didrach.	Dram.	Oboli	Ereoli	Minuti
L'Ereolo pesa	..	..	..	..	..	...	...	..	..	...	7
Obolo . . .	..	..	..	..	..	...	...	..	..	6	42
Dramma . . .	..	..	..	..	..	...	...	..	6	36	252
Didrachma.	..	..	..	..	..	...	...	2	12	72	504
Tetradrachmum .	..	..	..	..	..	...	2	4	24	144	1008
Oncia . . .	..	..	..	..	..	2	4	8	48	288	2016
Mna, o Mina vecchia .	..	..	..	..	$9\frac{3}{8}$	$18\frac{3}{4}$	$37\frac{1}{2}$	75	450	2700	18900
Libbra . . .	..	..	..	$1\frac{7}{25}$	12	24	48	96	575	3456	24192
Mna nuova di Solone	..	..	$1\frac{1}{24}$	$1\frac{1}{3}$	$12\frac{1}{2}$	25	50	100	600	3600	25200
Cæcropium . o Tal. min.	..	60	$62\frac{1}{2}$	80	750	1500	3000	6000	36000	ec.	
Talento maggiore .	$1\frac{1}{3}$	80	$83\frac{1}{3}$	$106\frac{2}{3}$	1000	2000	4000	8000	48000	ec.	

1537. *Dei Pesi Greci antichi secondo i Medici.*

	Libb.	Oncie	Duel.	Sicil.	Sext.	Drach	Scro.	Oboli	Siliq.	Ereo.	Lent.
L'Ereolo, o Calco pesa	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	2
Siliqua, o Ceratium	--	--	--	--	--	--	--	--	--	2	4
Obulus	--	--	--	--	--	--	--	--	3	6	12
Scrop., o Scriptulum	--	--	--	--	--	--	--	2	6	12	24
Drachma, o Holce	--	--	--	--	--	--	3	6	18	36	72
Sextula	--	--	--	--	--	$2\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	15	45	90	180
Sicilicus	--	--	--	--	$1\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	$11\frac{1}{4}$	$22\frac{1}{2}$	$57\frac{1}{2}$	135	270
Duella	--	--	--	$1\frac{1}{3}$	2	5	15	30	90	180	360
Oncia	--	--	$1\frac{3}{5}$	$2\frac{2}{15}$	$3\frac{1}{5}$	8	24	48	144	288	576
Libbra	--	12	$19\frac{1}{5}$	$25\frac{3}{5}$	$38\frac{2}{5}$	96	288	576	1728	3456	6912
Mina	$1\frac{1}{3}$	16	$25\frac{3}{5}$	$34\frac{2}{15}$	$51\frac{1}{5}$	128	384	768	2304	4608	9216

Le Note, con cui i Greci marcavano i loro Pesi, si vedano nella Tavola posta al fine del libro.

1538.

1538. *Dei Pesi antichi degli Ebrei.*

	Mine d'Oro	Mine d'Ar.	Libbr.	Oncie	Sicli	Dramm.	Solidi	Zuz	Gera.	Oboli
Il Gerach pesa	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	$1\frac{7}{75}$
Zuz	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	5	$5\frac{7}{15}$
Solidus	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	$1\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$	$7\frac{13}{45}$
Dramma	- -	- -	- -	- -	- -	- -	$1\frac{1}{2}$	2	10	$10\frac{42}{45}$
Siclo d'Argento, o Stater, o Secel	- -	- -	- -	- -	- -	2	3	4	20	$21\frac{13}{15}$
Oncia	- -	- -	- -	- -	2	4	6	8	40	$43\frac{11}{15}$
Libbra	- -	- -	- -	12	24	48	72	96	480	$524\frac{4}{5}$
Mina d'Argento, o Mna, o Manech	- -	- -	$2\frac{1}{2}$	30	60	120	180	240	1200	1312
Mina d'Oro	- -	$1\frac{2}{3}$	$4\frac{1}{6}$	50	100	200	300	400	2000	ec.
Cicar, o Talento	30	50	125	1500	3000	6000	9000	ec.		

Dalla menzione, che fa Mosè distintamente del peso ordinario, e del peso del Santuario, alcuni hanno giudicato, che il peso del Santuario fosse doppio del peso ordinario. Fra questi pesi però non vi è altra differenza, se non che il primo era custodito nel Tempio, acciò servisse di modello ai pesi pubblici.

1539. *Dei Pesi antichi Arabici.*

	Manes	Ratel	Sacros	Sexta.	Denar.	Darch	Garme	Onol.	Danic.	Kirat	Kestuf	Grani
Il Kestuf pesa	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	2
Kirat, o Siliqua	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	2	4
Danich, o Lupinus	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	2	4	8
Onolossat, o Obulus	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	$1\frac{1}{2}$	3	6	12
Garme, o Kermet, o Scropolo	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	2	3	6	12	24
Darchimi, o Alki, o Dramma	- -	- -	- -	- -	- -	- -	3	6	9	18	36	72
Denarius	- -	- -	- -	- -	- -	$1\frac{1}{7}$	$3\frac{3}{7}$	$6\frac{6}{7}$	$10\frac{2}{7}$	$20\frac{4}{7}$	$41\frac{1}{7}$	$82\frac{2}{7}$
Sextarium, o Semuncia	- -	- -	- -	- -	$3\frac{1}{2}$	4	12	24	36	72	144	288
Sacros, o Uncia	- -	- -	- -	2	7	8	24	48	72	144	288	576
Ratel, o Libra	- -	- -	12	24	84	96	288	576	864	1728	3456	6912
Manes, o Mina	- -	$1\frac{1}{3}$	16	32	112	128	384	768	1152	2304	4608	9216
Talento secondo Vitruvio	90	120	1440	ec.								

Ol.

Oltre la Mina di 16 oncie, che era la Mina Asiatica, e Egizia, avevano un' altra Mina di 20 oncie.

I precedenti pesi antichi rapportati alla libbra sottile di Venezia.

1540. Essendo che la libbra di Venezia fra noi è notissima, però mi servirò di questa libbra, che chiamasi sottile, ed è di oncie 12, affine di determinare con un peso cognito tutti i surriferiti Pesi.

1541. *Dei Pesi Romani.*

	Libbre	Oncie
Il Minuto pesa		$\frac{25}{2272}$
Quadrante		$\frac{25}{1136}$
Sextertius		$\frac{25}{568}$
Scropolo		$\frac{175}{3408}$
Victoriatus		$\frac{25}{284}$
Dramma		$\frac{175}{1136}$
Denarius argenteus		$\frac{25}{142}$
Sicilicus		$\frac{175}{568}$
Uncia		$1\ \frac{33}{142}$
Libra	1	$2\ \frac{56}{71}$
Dupondium	2	$5\ \frac{41}{71}$
Sextertium	3	$8\ \frac{1}{71}$

1542. *Dei Pesi Greci.*

	Oncie
Il Minuto pesa	$\frac{25}{40896}$
Ereolo	$\frac{175}{40896}$
Obolo	$\frac{175}{1136}$
Dramma	$\frac{175}{568}$

Dram-

	Libbre	Oncie
Didrachma		$\frac{175}{568}$
Tetradrachmum		$\frac{175}{284}$
Oncia		$1\ \frac{33}{142}$
Mina		$11\ \frac{610}{1136}$
Libbra	1.	$2\ \frac{56}{71}$
Mina di Solone	1.	$3\ \frac{215}{284}$
Talento minore	77.	$\frac{11}{71}$
Talento maggiore	102.	$8\ \frac{18}{71}$

1543. *Dei Pesi Greci secondo i Medici.*

	Libbre	Oncie
La Lente pesa		$\frac{175}{81792}$
Ereolo		$\frac{175}{40896}$
Siliqua		$\frac{175}{20448}$
Obolo		$\frac{175}{6816}$
Scropolo		$\frac{175}{3408}$
Dramma		$\frac{175}{1136}$
Sextula		$\frac{875}{2272}$
Sicilicus		$\frac{2625}{4544}$
Duella		$\frac{875}{1136}$
Oncia		$1\ \frac{33}{142}$
Libbra	1.	$2\ \frac{56}{71}$
Mina	1.	$7\ \frac{15}{71}$

1544

1544. *Dei Pesi degli Ebrei.*

	Libbre	Oncie.
L'Obolo pesa		$\frac{525}{25666}$
Gerach		$\frac{7}{313}$
Zuz		$\frac{35}{313}$
Solidus		$\frac{140}{933}$
Dramma		$\frac{70}{313}$
Siclo		$\frac{140}{313}$
Oncia		$\frac{280}{313}$
Libbra		$10\frac{230}{313}$
Mina d'argento	2.	$2\frac{262}{313}$
Mina d'oro	3.	$8\frac{228}{313}$
Talento	111.	$9\frac{263}{313}$

1545. *Dei Pesi Arabici.*

Il Grano pesa	$\frac{39967}{18321408}$
Kestuf	$\frac{39967}{9160704}$
Kirat	$\frac{39967}{4580352}$
Danich	$\frac{39967}{2290176}$
Onoloffat	$\frac{39967}{1526784}$
Garme	$\frac{39967}{763892}$
Darchimi	$\frac{119901}{763892}$
Denarius	$\frac{239802}{1336811}$
Sextarium	$\frac{119901}{160973}$

	Libbre	Oncie
Sacros		$1\frac{48829}{190973}$
Ratel	2.	$3\frac{13039}{190973}$
Manes	1.	$8\frac{17372}{190973}$
Talento	150.	$8\frac{35696}{190973}$

1546. *Talenti, e Monete d' Oro antiche.*

	Libbre	Oncie
Il Talento Romano maggiore tanto d'Oro, come d'Argento	102.	$8\frac{28}{71}$
Il Talento Romano minore tanto d'Oro, come d'Argento	74.	$2\frac{60}{71}$
Il Talento Siriano d'Oro, e d'Argento	20.	$6\frac{101}{142}$
Il Talento d'Oro Tolemaico	24.	$9\frac{129}{213}$
Il Talento Babilonico d'Oro, e d' Argento	91.	$4\frac{58}{213}$
Il Talento Egineo d' Oro, e d'Argento	130.	$6\frac{158}{213}$
Il Talento d' Oro degli Ebrei	154.	$\frac{672}{1136}$
Il Talento di Rodi	57.	$9\frac{63}{284}$
Il Talento Siculo vecchio	88.	$\frac{24}{71}$
Il Talento Siculo nuovo	44.	$\frac{12}{71}$
Il Talento d' Argento Alessandrino	154.	$\frac{84}{141}$
La Dramma Egizia		$\frac{175}{6816}$
La Mina Alessandrina		$2\frac{46}{71}$
La Dramma Eginea		$\frac{875}{3404}$
Il Kesitah d'Oro Ebreo		$\frac{24}{71}$
L' Obolo d'Argento Egineo		$\frac{27}{426}$
Il Cistophorus d'Argento Greco		$\frac{17}{213}$

La

	Libbre	Oncie
La Mina Siriana d'Argento		$3 \frac{101}{142}$
La Mina Tolemaica d'Argento		$4 \frac{202}{213}$
La Mina d' Argento Babilonese	1.	$5 \frac{95}{426}$
La Mina Eginea	2.	$\frac{53}{71}$
La Dramma d'Oro Ebraica		$4 \frac{16}{71}$
Il Siclo Babilonico		$\frac{140}{939}$

De' Pesi Moderni.

1547. *De' Pesi Romani.*

	Libbre	Oncie	Dramme	Ferlini	Carati	Grani
Il Carato pesa						4
Ferlino					10.	40.
Dramma				2.	20.	80.
Oncia			8.	16.	160.	640.
Libbra		12.	96.	192.	1920.	7680.
Peso	25.	300.	ec.			

1548. *Pesi di Modena per l'Oro, e Argento.*

	Oncie	Carati	Grani
Il Carato pesa			4
Oncia		180.	720
Libbra	12.	2160.	8640

1549. *Per la Seta simili a quelli di Bologna.*

	Oncie	Ferlini	Carati
Il Ferlino pesa			10.
Oncia		18.	180.
Libbra	12.	216.	2160.

1550. *Pesi di Modena per gli Speziali.*

	Oncie	Dramme	Danari	Grani
Il Danaro pesa				24.
Dramma			3.	72.
Oncia		8.	24.	576.
Libbra	12.	96.	288.	6912.

1551. *De' Pesi di Milano.*

	Libbra sottile	Marche	Oncie	Danari	Grani
Il Danaro Pesa					24
Oncia				24.	576
Marca			8.	192.	4608
Libbra sottile		$1\frac{1}{2}$	12.	288.	6912
Libbra grossa	$2\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{2}$	28.	672.	16128

1552. *De' Pesi di Bologna per gli Speziali.*

	Oncie	Dramme	Scropoli	Grani
Lo Scropolo pesa				24
Dramma			3.	72
Oncia		8.	24.	576
Libbra	12.	96.	288.	6912

1553. *De' Pesi di Bologna per gli Orefici.*

	Oncie	Ottavi	Carati	Grani
Il Carato pesa				4.
L'Ottavo			20.	80.
L'Oncia		8.	160.	640.
La Libbra	12	96.	1920.	7680.

1554. *Dei Pesi di Venezia.*

	Mirri	Libbre	Oncie	Saggi
L'oncia pesa	- -	- -	- -	6
Libbra	- -	- -	12	72
Mirro	- -	30	360	2160
Migliaro	4	120	1440	8640

I Veneziani hanno due libbre, la sottile, e la grossa. La grossa è $1\frac{11}{21}$ della sottile.

1555. *Dei Pesi di Venezia per l'Oro, e per l'Argento.*

	Oncie	Dramme	Carati	Grani
Il Carato pesa	- -	- -	- -	4
Dramma	- -	- -	18	72
Oncia	- -	8	144	576
Libbra	12	96	1728	6912

1556.

1556. *Dei Pesi Francesi.*

	Libbre	Marchi	Oncie	Grossi	Danari	Grani
Il Danaro, o scropolo pesa	- -	- -	- -	- -	- -	24
Grosso, o Dramma	- -	- -	- -	- -	3	72
Oncia	- -	- -	- -	8	24	576
Marco	- -	- -	8	64	192	4608
Libbra	- -	2	16	128	384	9216
Quintale	100	200	1600	ec.		

1557. *Dei Pesi Francesi pei Medici.*

	Dramme	Scropoli	Oboli	Grani
L'Obolo pesa	- - -	- - -	- -	10
Scropolo	- - -	- - -	2	20
Dramma	- - -	3	6	60
Oncia	8	24	48	480

1558. *Dei Pesi Inglesi.*

Gl' Inglesi usano due sorti di Pesi. Uno dicesi Averdupois Weight: L' altro Troy Weight; e questo dagli Orefici è suddiviso in altre parti diversamente, che dagli Speziali.

1559. *Del Peso Averdupois Weight.*

	Quintali	Libbre	Oncie	Dramme	Scropoli
La Dramma pesa	- -	- -	- -	- - -	3
Oncia	- -	- -	- -	8	24
Libbra	- -	- -	16	128	384
Quintale, o Hundred	- -	100	1600	12800	38400
Tun	20	2000	32000	256000	ec.

1560. *Del Peso Troy Weight.*

Secondo gli Orefici

	Oncie	Penny Weight	Grani
Il Penny Weight	-	- - - -	24
Oncia	-	20	480
Libbra	12	240	5760

1561. Secondo gli Speziali

	Oncie	Dram.	Scrop.	Grani
Lo Scropolo pesa		- - -	- - -	20
Dramma	- -	- - -	3	60
Oncia	- - -	8	24	480
Libbra	12	96	288	5760

1562.

1562. *Divisione del grano Troy secondo i Monetieri ec.*

	Pites	Droits	Perits	Flanks
Il Perit pesa	- -	- -	- -	24
Droit	- -	- -	20	480
Pites	- -	24	480	11520
Grano	20	480	9600	230400

1563. *Divisione del Marco per l'Oro, e per l'Argento.*

	Carati	Penny Weight	Grani	Primi
Il Grano pesa	-	- - - -	- - -	24
Penny Weight	-	- - - -	24	576
Carato	-	8	192	4608
Marco	24	192	4608	110592

1564. *Del Pound Averdupois di Scozia.*

	Marchi	Oncie	Grossi	Grani
Il Grosso pesa	- -	- - -	- -	36
Oncia	- -	- - -	16	576
Marco	- -	8	128	4608
Pound	2	16	256	9216

Il Pound Troy di Scozia è oncie $15\frac{1}{4}$ del peso Troy Inglese, cioè è grani 75 del peso Troy Inglese.

1565. *Dei Pesi Olandesi.*

	Loot	Angel	As
L'Angel pesa	- - -	- - -	32
Loot	- - -	10	320
Libbra peso di Marco	32	320	10240

1566. *Dei Pesi di Spagna.*

	Arobas	Libbre	Oncie	Adarme
L'oncia pesa	- - -	- - -	- - -	16
Libbra	- - -	- - -	12	192
Arobas	- - -	25	300	4800
Quintale ordinario	4	100	1200.	19200

Il Quintale Macho pesa 150 libbre, o sia 6 Arobas.

1567.

1567. *Dei Pesi Spagnuoli per l' Oro.*

	Castigliani	Tomin	Grani
Il Tomin pesa	. . . .	. . .	12
Castigliano	. . . .	8	96
Libbra	100	800	9600

1568. *Dei Pesi Cinesi.*

I Cinesi nei loro Pesi hanno preso norma dai grani d'Orzo. Il Peso minore, che hanno chiamato Jo, è di 3 grani d'Orzo.

10. grani fanno un Quei.
10. Quei, o 100 grani fanno un Go, o Chua, cioè un Pugno.
10. Go, o 1000 grani fanno un Chao.
10. Chao, o 10000 grani fanno un Cho.
10. Cho, o 100000 grani fanno un Ho.
10. Ho fanno un Xim, cioè la libbra de' Venditori.
10. Xim fanno un Teu.
10. Teu fanno un Xe, o Tan, cioè 100. libbre di misura, che è il peso solito di un Facchino.

$1\frac{2}{5}$ di Xe fanno un Yu

3. Xe fanno un Chum.

$2\frac{2}{3}$ di Chum fanno un Pin.

In questo modo i Cinesi misurano, e pesano le Biade.

La loro seconda maniera di pesare è regolata in questa forma

Il minimo peso è il Chin.

10. Chin fanno un Xa.
10. Xa fanno un Sien.
10. Sien fanno un Vi.
10. Vi fanno un Hoe.
10. Hoe fanno un Su.
10. Su fanno un Hao.
10. Hao fanno un Li.
10. Li fanno un Fuen.
10. Fuen fanno un Gien, o Cien.
16. Cien fanno un Leam, che è un'Oncia.
16. Leam fanno un Kin, che è una Libbra.

1569. E questi sono i Pesi Cinesi antichi. I Moderni sono come segue

	Pic	Catis	Tael	Mas	Condreen
Il Mas pesa		. . .	. . .	. . .	10
Tael, o Tali		. . .	. . .	10	100
Catis		. . .	16	160	1600
Pic, o Piece		100	1600	16000	160000
Bats, o Bahar, o Bakaire	3.	300	4800	48000	480000

1570.

1570. *Dei Pesi di Sian.*

	Catis	Tael	Baats	May.	Fov.	Paye	Clams
Il Paye pesa		- -	- -	- -	- -	- -	2
Fovang		- -	- -	- -	- -	4	8
Mayon, o Sclingi		- -	- -	- -	2	8	16
Baat, o Tical		- -	- -	4	8	32	64
Tael		- -	4	16	32	128	256
Cati, o Schan		8	32	128	256	1024	2048
Pice, o Piece	2.	16	64	256	512	2048	4096

1571. *Dei Pesi del Pegù.*

	Agiti	Abocchi	Tecali
L'Abocco pesa		. . .	$12 \frac{1}{2}$
Agito		2	25
Bis, o Biza	4	8	100

1572. *Dei Pesi de' Turchi.*

	Quillot	Batman	Occos
Il Batman, o Battemant pesa		. .	6
Quillot		$3 \frac{2}{3}$	22
Quintal	2.	$7 \frac{1}{3}$	44

I Turchi hanno un'altro Batman, il quale è un quarto del precedente.

1573. *Dei Pesi Persiani.*

	Ratel	Derhem	Meschal	Dung	Grani
Il Dung pesa		. . .	. . .	. .	4
Meschal		. . .	. . .	6	24
Derhem		. . .	2	12	48
Ratel		$3 \frac{1}{8}$	$6 \frac{1}{4}$	$37 \frac{1}{2}$	150
Batman, o Man peso del Re	16	50	100	6000	2400

I Persiani usano ancora un'altro Batman, che chiamano Batman di Tauris, il quale è in circa la metà del Batman peso del Re.

1574. *Dei Pesi Portoghesi.*

	Rotoli	Faratelle	Arate
La Faratella pesa		. . .	2
Rotolo		6	12
Aroba	$2 \frac{2}{3}$	16	32

I pre-

I precedenti pesi moderni riferiti alla libbra sottile di Venezia.

1575. *Dei Pesi Romani.*

	Libbre	Oncie
Il Grano pesa di Venezia		$\frac{9421}{4573280}$
Carato		$\frac{9421}{1108310}$
Ferlino		$\frac{9421}{110832}$
Dramma		$\frac{9421}{58416}$
Oncia		1 $\frac{2119}{7302}$
Libbra	1.	2 $\frac{4238}{5183}$
Peso	30.	10 $\frac{8290}{5183}$

1576. *Pesi di Modena per l'Oro, e per l'Argento.*

	Libbre	Oncie
Il Grano pesa di Venezia		$\frac{151}{95040}$
Carato		$\frac{151}{23760}$
Oncia		1 $\frac{19}{132}$
Libbra	1.	1 $\frac{7}{11}$

1577. *Pesi di Modena per la Seta.*

	Libbre	Oncie
Il Carato pesa di Venezia		$\frac{83}{11875}$
Ferlino		$\frac{166}{2375}$
Oncia		1 $\frac{57}{275}$
Libbra	1.	2 $\frac{134}{275}$

1578. *Pesi di Modena per gli Speziali.*

	Libbre	Oncie
Il Grano pesa di Venezia		$\frac{151}{76032}$
Danaro		$\frac{151}{3168}$
Dramma		$\frac{151}{1056}$
Oncia		1 $\frac{28}{132}$
Libbra	1.	1 $\frac{7}{11}$

1579. *Pesi di Milano.*

	Libbre	Oncie
Il Grano pesa di Venezia		$\frac{625}{143432}$
Danaro		$\frac{1875}{18304}$
Oncia		$1\ \frac{27}{286}$
Marca		$8\ \frac{108}{143}$
Libbra sottile	1.	$1\ \frac{16}{143}$
Libbra grossa	2.	$6\ \frac{91}{143}$

1580. *Dei Pesi di Bologna per gli Speziali.*

	Libbre	Oncie
Il Grano pesa di Venezia		$\frac{83}{39600}$
Scropolo		$\frac{83}{1650}$
Dramma		$\frac{83}{550}$
Oncia		$1\ \frac{57}{275}$
Libbra	1.	$2\ \frac{134}{275}$

1581. *Pesi di Bologna per gli Orefici.*

	Libbre	Oncie
Il Grano pesa di Venezia		$\frac{83}{44000}$
Carato		$\frac{83}{11000}$
Ottavo		$\frac{83}{550}$
Oncia		$1\ \frac{57}{275}$
Libbra	1	$2\ \frac{134}{275}$

1582. *Dei Pesi Francesi.*

	Libbre	Oncie
Il Grano pesa di Venezia		$\frac{1}{426}$
Danaro		$\frac{4}{71}$
Grosso		$\frac{12}{71}$
Oncia		$1\ \frac{25}{71}$

Mar-

	Libbre	Oncie
Marco		$10\frac{58}{71}$
Libbra	1.	$9\frac{45}{71}$
Quintale	180.	$3\frac{57}{71}$

1583. *Dei Pesi Francesi pei Medici.*

	Libbre	Oncie
Il Grano pesa di Venezia		$\frac{1}{426}$
Obolo		$\frac{5}{213}$
Scropolo		$\frac{10}{213}$
Dramma		$\frac{10}{71}$
Oncia		$1\frac{9}{71}$

1584. *Del Peso Inglese Averdupois Weight.*

	Libbre	Oncie
Lo Scropolo pesa di Venezia		$\frac{89}{1704}$
Dramma		$\frac{89}{568}$
Oncia		$1\frac{18}{71}$
Libbra	1.	$8\frac{4}{71}$
Quintale	167.	$1\frac{45}{71}$
Tun	3342.	$8\frac{48}{71}$

1585. *Del Peso Troy Weight secondo gli Orefici.*

	Libbre	Oncie
Il Grano pesa di Venezia		$\frac{1157}{408960}$
Penny-Weight		$\frac{1157}{17040}$
Oncia		$1\frac{305}{852}$
Libbra	1.	$4\frac{25}{71}$

1586. *Del Peso Troy Weight secondo gli Speziali.*

	Libbre	Oncie
Il Grano pesa di Venezia		$\frac{1157}{408960}$
Scropolo		$\frac{1157}{20448}$
Dramma		$\frac{1157}{6816}$
Oncia		$1\frac{305}{852}$
Libbra	1.	$4\frac{22}{71}$

1587. *Divisione del grano Troy secondo i Monetieri.*

		Libbre	Oncie
Il Flanks pesa di Venezia			$\frac{1157}{94224384000}$
Perit			$\frac{1157}{3926016000}$
Droit			$\frac{1157}{196300800}$
Pites			$\frac{1157}{8179200}$
Grano			$\frac{1157}{408960}$

1588. *Divisione del Marco Inglese per l' Oro, e per l' Argento*

		Libbre	Oncie
Il Primo pesa di Venezia			$\frac{1157}{9815040}$
Grano			$\frac{1157}{408960}$
Penny-Weight			$\frac{1157}{17040}$
Carato			$\frac{1157}{2130}$
Marco	1	1	$\frac{13}{355}$

1589. *Del Pound Averdupois di Scozia.*

		Libbre	Oncie
Il Grano pesa di Venezia			$\frac{1691}{71568}$
Grosso			$\frac{1691}{19880}$
Oncia		1	$\frac{807}{2885}$
Marco		10	$\frac{1406}{2885}$
Pound	1	8	$\frac{2812}{2885}$

1590. *Dei Pesi Olandesi.*

		Libbre	Oncie
L' As pesa di Venezia			$\frac{4547}{2181120}$
Augel			$\frac{4547}{68160}$
Loot			$\frac{4547}{6816}$
Libbra	1	9	$\frac{74}{213}$

1591.

1591. *Dei Pesi di Spagna.*	Libbre	Oncie
L'Adarme pesa di Venezia		$\frac{7777}{81792}$
Oncia		1 $\frac{2665}{5112}$
Libbra	1	6 $\frac{109}{426}$
Arobas	38	$\frac{169}{426}$
Quintale	152	1 $\frac{175}{213}$
1592. *Dei Pesi Spagnuoli per l'Oro.*		
Il Grano pesa di Venezia		$\frac{7777}{4089600}$
Tomin		$\frac{7777}{340800}$
Castigliano		$\frac{7777}{42600}$
Libbra	1	6 $\frac{109}{426}$
1593. *Dei Pesi Cinesi.*		
Il Jo pesa di Venezia		$\frac{21}{355000}$
Quei		$\frac{7}{35500}$
Go		$\frac{7}{3550}$
Chao		$\frac{7}{355}$
Cho		$\frac{14}{71}$
Ho		1 $\frac{69}{71}$
Xim	1	7 $\frac{51}{71}$
Teu	16	5 $\frac{13}{71}$
Xe	164	3 $\frac{59}{71}$
Yu	262	10 $\frac{66}{71}$
Chum	788	8 $\frac{35}{71}$

1595. *Dei Pesi di Sian.*

	Libbre	Oncie.
Il Clams pesa di Venezia		$\frac{12093}{1433600}$
Paye		$\frac{12093}{716800}$
Fovang		$\frac{12093}{179200}$
Mayon		$\frac{12093}{89600}$
Baats		$\frac{12093}{22400}$
Tael		$2 \frac{893}{5600}$
Catis	1.	$5 \frac{193}{700}$
Pice	2.	$10 \frac{193}{350}$

1596. *De' Pesi del Pegù.*

	Libbre	Oncie.
Il Tecali Pesa di Venezia		$\frac{9}{20}$
Aboccho		$5 \frac{5}{8}$
Agito		$11 \frac{1}{4}$
Bis	3.	9

1597. *De' Pesi de' Turchi a Costantinopoli.*

	Libbre	Oncie.
L'Occos pesa di Venezia	4.	$6 \frac{2395}{3408}$
Batman	27.	$4 \frac{123}{568}$
Quillot	100.	$3 \frac{785}{1704}$
Quintal	200.	$6 \frac{785}{852}$

1598. *De' Pesi Persiani.*

	Libbre	Oncie.
Il Grano pesa di Venezia		$\frac{16}{355}$
Dung		$\frac{64}{355}$

Mes-

	Libbre	Oncie
Meschal		$1\frac{29}{355}$
Derhem		$2\frac{58}{355}$
Ratel		$6\frac{70}{71}$
Batman	9.	$\frac{12}{71}$

1599. *De' Pesi Portoghesi.*

	Libbre	Oncie
L'Arate pesa di Venezia	1.	$7\frac{43}{71}$
Foratella	3.	$3\frac{15}{71}$
Rotolo	19.	$7\frac{19}{71}$
Aroba	52.	$3\frac{27}{71}$

Libbre, e altri Pesi di diverse Città riferiti alla Libbra sottile di Venezia.

	Libbre	Oncie
1600. Una Libbra d' Agra pesa di Venezia . . .	1.	$4\frac{4}{19}$
d' Agra Peso Reale	1.	$9\frac{15}{17}$
d' Alessandria della Paglia Città nel Monferrato.	1.	$11\frac{221}{284}$
d' Alicante	1	$7\frac{50}{71}$
d' Amburg	1.	$8\frac{66}{71}$
d' Anversa	1.	$8\frac{35}{142}$
d' Archangel	1.	$5\frac{20}{71}$
d' Argentina	1.	$8\frac{175}{213}$
d' Avignon	1.	$5\frac{56}{71}$
di Basilea	1.	$9\frac{167}{213}$
di Bajona	1.	$9\frac{74}{213}$

di

	Libbre	Oncie
di Bergen	1.	$9\frac{157}{213}$
di Bergompzom	1.	$9\frac{51}{71}$
di Berna	1.	$7\frac{97}{415}$
di Besanzon	1.	$9\frac{74}{213}$
di Bilboa	1.	$9\frac{74}{213}$
di Bois-le-Duc	1.	$8\frac{170}{218}$
Di Bourdeaux	1.	$9\frac{74}{213}$
di Bremen	1.	$10\frac{508}{1775}$
del Brabante	1.	$8\frac{35}{142}$
di Brescia	1.	$\frac{123}{142}$
di Breslavia	1.	$5\frac{21}{142}$
di Bruges, e di Cadice	1.	$8\frac{59}{426}$
di Bruxelles	1.	$8\frac{170}{218}$
di Colonia	1.	$8\frac{127}{142}$
di Coninsghsberg	1.	$5\frac{21}{142}$
di Coppenhagen	1.	$7\frac{133}{142}$
di Costantinopoli detta Rottos	2.	$\frac{212}{1775}$
di Crema fottile		$11\frac{173}{213}$
di Crema grossa	2.	$3\frac{110}{426}$
di Bergamo fottile	1.	$9\frac{167}{218}$
di Bergamo grossa	2.	$8\frac{2}{213}$
di Danzica	1.	$6\frac{115}{142}$
di Dort	1.	$9\frac{74}{213}$

	Libbre	Oncie
Una lib. di Dublin	1.	$10\frac{2}{213}$
di Egitto		$1\frac{46}{71}$
di Firenze	1.	$1\frac{1}{2}$
di Francfort sul Meno	1.	$9\frac{167}{212}$
di Gant	1.	$8\frac{170}{213}$
di Genova a Bilancia leggera	1.	$1\frac{203}{213}$
di Genova al peso Caffa	1.	$2\frac{33}{142}$
di Genova a Bilancia grossa	1.	$2\frac{151}{426}$
di Ginevra	2.	$\frac{4}{71}$
di Grecia antica	1.	$2\frac{50}{213}$
di Leyden	1.	$8\frac{57}{142}$
di Liegi	1.	$8\frac{65}{213}$
di Lilla	1.	$7\frac{66}{71}$
di Linguadoca superiore	1.	$6\frac{13}{142}$
di Linguadoca detta di Tavola	1.	$6\frac{18}{71}$
di Lione per le Merci	1.	$6\frac{86}{213}$
di Lione per la Seta	1.	$7\frac{373}{425}$
di Livorno	1.	$2\frac{52}{71}$
di Lovanio	1.	$8\frac{170}{213}$
di Lubecca	1.	$8\frac{170}{213}$
di Lucca	1.	$3\frac{37}{426}$
di Malines	1.	$8\frac{170}{213}$
di Marsiglia	1.	$5\frac{61}{213}$

Una

	Libbre	Oncie
Una lib. di Messina	1.	$1\frac{359}{426}$
di S. Malò	1.	$9\frac{74}{213}$
di Montpellier	1.	$5\frac{327}{426}$
di Moscovia detta Barkeroct	1.	$5\frac{88}{142}$
di Namur	1.	$8\frac{75}{142}$
di Nantes	1.	$9\frac{78}{213}$
di Nancy	1.	$8\frac{89}{142}$
di Napoli	1.	$2\frac{38}{71}$
di Norimberga	1.	$10\frac{37}{71}$
di Pisa	1.	$3\frac{9}{71}$
di Provenza	1.	$6\frac{18}{71}$
di Revel	1.	$6\frac{349}{426}$
di Riga	1.	$5\frac{81}{142}$
della Rocella	1.	$9\frac{74}{213}$
di Roterdam	1.	$9\frac{74}{213}$
di Rouen peso ordinario	1.	$9\frac{45}{71}$
di Rouen peso di Vicomtè	1.	$10\frac{101}{426}$
di Rossiglione peso di Tavola	1.	$6\frac{18}{71}$
di Saragozza	1.	$1\frac{100}{213}$
di Siviglia	1.	$8\frac{67}{142}$
di Smirne	1.	$7\frac{66}{71}$
di Stetin	1.	$7\frac{173}{426}$
di Stockolm	2.	$2\frac{75}{213}$

di

	Libbre	Oncie
Il Cantaro di Toſcana - - - - - -	189.	1 $\frac{1}{71}$
di Livorno - - - - - -	190.	$\frac{105}{142}$
Il Quintal del Cairo - - - - -	407.	9 $\frac{14}{71}$
Lo Schippondt d'Anverſa, e Amburgo - -	506.	1 $\frac{67}{71}$
di Svezia per il Rame - - -	702.	10 $\frac{38}{213}$
di Bergen in Norveggia - -	543.	5 $\frac{9}{71}$
d' Amſterdam - - - -	26.	3 $\frac{63}{71}$
di Konigsberg - - - - -	485.	10 $\frac{70}{71}$
di Coppenhagen - - -	531.	7 $\frac{51}{71}$
di Danzica nelle Merci fine - -	500.	3 $\frac{27}{71}$
di Danzica nelle Merci ordinarie -	532.	11 $\frac{15}{71}$
di Lubecca - - - - - -	554.	7 $\frac{85}{213}$
di Revel - - - - -	627.	3 $\frac{109}{213}$
di Riga - - - - - -	585.	8 $\frac{12}{71}$
Lo Steeno d' Amſterdam - - - -	17.	6 $\frac{110}{213}$
Il Quintale di Cadice comune - - -	167.	7 $\frac{67}{71}$
Il Quintale di Cadice detto Macho - -	251.	5 $\frac{65}{71}$
Lo Steeno di Konigsberg - - - -	56.	1 $\frac{113}{426}$
Il Liſpondo di Coppenagen - - - -	26.	4 $\frac{18}{71}$
Il Liſpondo di Danzica - - - -	25.	$\frac{22}{71}$
Il Liſpondo di Lubecca - - - -	27.	1 $\frac{45}{142}$
Il Rottolo di Lisbona - - - - -	20.	$\frac{48}{71}$

	Libbre	Oncie
Il Carico di Marsiglia	432.	2 $\frac{50}{72}$
Il Poede di Moscovia	57.	8 $\frac{20}{72}$
Il Berkevvit di Moscovia	576.	10 $\frac{58}{72}$
Il Rubbio di Torino	29.	6 $\frac{48}{72}$
Il Cantaro di Tripoli	171.	3 $\frac{45}{72}$
Il Mataro di Tunesi	35.	9 $\frac{5}{72}$
Lo Schippondt di Svezia per i viveri . .	870.	2 $\frac{114}{115}$
Il Sah-Cheray di Persia	210.	10 $\frac{62}{72}$
Lo Schan di Sian	1.	1 $\frac{1318}{1775}$
Rotolis di Goa	1.	5 $\frac{53}{72}$

Del Peso delle Misure vacue ridotto alla Libbra sottile di Venezia.

1601. Quantunque le Misure Vacue servano a diversi generi e di Liquidi, e di Aridi, pure nel determinarne il loro peso io considero le misure vacue pei liquidi ripiene soltanto d'acqua, e le Misure vacue per gli Aridi ripiene soltanto di Frumento, mentre mediante il loro peso relativamente a questi due generi, potrà facilmente ciascuno determinarne il peso anche per qualunque altro genere, niente altro richiedendosi, che saperne le gravità specifiche, delle quali la Tavola si può vedere presso chiunque ha scritto di Fisica. Siccome ancora le diverse sorti d'acqua, e di frumento variano di peso, così acciò niuno possa esitare circa la qualità dell'una, e dell'altro, di cui mi sono servito nel determinare i pesi di queste misure, si avverta, che un piede cubico d'acqua, secondo cui mi sono regolato, pesa di Venezia libbre 119. oncie 6. $\frac{200916}{215061}$, e un piede cubico di frumento pesa di Venezia libbre 91. oncie 3. $\frac{2354609}{5577049}$.

1602. *Delle Misure Romane antiche pei liquidi.*

La Ligula piena d'acqua pesava . . .	$\frac{1}{2}$
Cyathus	2 $\frac{1}{12}$
Acetabulum	3 $\frac{1}{48}$
Quartarius	6 $\frac{1}{24}$

Hemi-

	Libbre	Oncie
Hemina	1.	$\frac{1}{12}$
Sextarius	2.	$\frac{1}{6}$
Congius	12.	$\frac{10}{11}$
Urna	48.	$3\frac{9}{11}$
Amphora	96.	$7\frac{8}{11}$
Culeus	1932.	$10\frac{6}{11}$

1603. *Delle Misure vacue Romane per gli Aridi.*

	Libbre	Oncie
La Ligula piena di Frumento pesava . . .		$\frac{22}{55}$
Cyathus		$1\frac{7}{11}$
Acetabulum		$2\frac{4}{9}$
Hemina		$9\frac{4}{5}$
Sextarius	1.	$7\frac{32}{55}$
Semimodius	13.	$\frac{1}{3}$
Modius	26.	$\frac{2}{3}$

1604. *Delle Misure vacue Attiche pei liquidi.*

	Libbre	Oncie
Il Cocliarion pieno d'acqua pesava . . .		$\frac{2}{15}$
Cheme		$\frac{4}{15}$
Mystron		$\frac{1}{3}$
Concha		$\frac{2}{3}$
Cyathus		$1\frac{1}{3}$
Oxybaphon		$2\frac{1}{328}$
Hemicotylion		$4\frac{1}{264}$

Co-

	Libbre	Oncie
Cotyle		9 $\frac{1}{132}$
Xeſtes	1.	6 $\frac{1}{66}$
Chos	9.	$\frac{1}{11}$
Ceramium	108.	$\frac{10}{11}$

1605. *Delle Miſure vacue Attiche per gli Aridi.*

	Libbre	Oncie
Il Cocliarion pieno di Frumento peſava		$\frac{66}{557}$
Cyathus		1 $\frac{2}{11}$
Oxybahon		1 $\frac{43}{55}$
Cotyle		7 $\frac{6}{55}$
Xeſtes	1.	2 $\frac{1}{4}$
Choenix	1.	9 $\frac{1}{3}$
Medimnus	85.	3 $\frac{4}{5}$

1606. *Delle Miſure vacue Attiche ruſtiche pel liquidi.*

	Libbre	Oncie
Il Myſtrum pieno d'acqua peſava		$\frac{1}{3}$
Cyathus		1 $\frac{1}{3}$
Oxybaphon		2 $\frac{1}{528}$
Cotyle		9 $\frac{1}{132}$
Chœnix	2.	3 $\frac{1}{44}$
Semiſextarius	9.	$\frac{1}{11}$
Sextarius	18.	$\frac{2}{11}$
Tertiarius	36.	$\frac{4}{11}$
Semimedimnus	54.	$\frac{5}{11}$
Medimnus	108.	$\frac{10}{11}$

1607.

1607. *Delle Misure vacue Attiche rustiche per gli Aridi.*

	Libbre	Oncie
Il Myftrum pieno di frumento pefava . .		$\frac{1}{3}$
Cyathus		$1\frac{2}{11}$
Oxybaphon		$1\frac{43}{55}$
Cotyle		$7\frac{6}{55}$
Chus	7.	$1\frac{1}{3}$
Amphora	28.	$5\frac{14}{55}$
Metretes	56.	$10\frac{3}{5}$

1608. *Delle Misure vacue degli Ebrei pei liquidi.*

	Libbre	Oncie
Il Caph pieno d' acqua pefava	1.	
Log	1.	4
Cab	5.	4
Hin	16.	
Seah	32.	
Bath	96.	
Coron	960.	

1609. *Delle Misure vacue Sacre pei Liquidi.*

	Libbre	Oncie
L' Epha Sacra piena d'acqua pefava . .	146.	$10\frac{3}{7}$
Corus Sacro	1441.	$\frac{4}{21}$
Dolium Sefquiculeare	2882.	$\frac{8}{21}$
Conca di Bronzo	216.	$\frac{19}{21}$
Mare di Bronzo	19568.	$5\frac{4}{7}$

1610. *Delle Misure vacue degli Ebrei per gli Aridi.*

	Libbre	Oncie
Il Gachal pieno di frumento pefava . .		$2\frac{3}{5}$
Cab	4.	$2\frac{3}{5}$
Gomor	7.	6

	Libbre	Oncie
Seah	25.	1
Epha	75.	3
Lettech	376.	5
Chomer	752.	10

1611. *Delle Misure vacue sacre per gli Aridi.*

La Misura del Pane di proposizione piena di frumento pesava	1	$6\frac{1}{11}$
Il Modulo delle Primizie	75	3

1612. *Delle Misure vacue Egizie.*

L' Inium pieno d' acqua pesava	2	$\frac{1}{6}$
Oephin	16	$1\frac{1}{3}$
Aporrhyma	22	$1\frac{5}{6}$
Artaba	193	4

1613. *Delle Misure vacue Sirie.*

La Chœnix piena d' acqua pesava	8	$\frac{1}{18}$
Sabitha	38	$5\frac{1}{21}$
Collathum	43	$7\frac{2}{3}$
Metrete	240	$1\frac{1}{3}$

1614. *Delle Misure vacue Persiane.*

Il Capitha piena d' acqua	4	6
Artaba minore	108	0
Artaba maggiore	114	9
Achana piena di frumento	4860	0

1615. *Delle Misure vacue degli Arabi*

Il Falgerin pieno d' acqua		$\frac{557}{1070}$
Cuathum		2
Kasfuf		3
Keiliati		6
Corboni	1	0
Kist-acsat	2	0
Missichaus	6	0
		Sohcin

	Libbre	Oncie
Sohcin	12	0
Dorach	96	0

1616. *Dell' altre Misure vacue degli Arabi.*

	Libbre	Oncie
Il Mystrum minore pieno d' acqua		1
Gabenum		3
Mystrum maggiore	1	4
Dadix	13	$6\frac{1}{10}$
Hydria	20	$\frac{2}{7}$
Campiaces	24	$\frac{1}{7}$
Cophinus	36	$\frac{3}{7}$
Mares	40	$\frac{3}{7}$
Cyprus Ponticus	64	$\frac{1}{2}$
Cyprus	108	$\frac{17}{21}$

1617. *Delle Misure moderne vacue Romane pei liquidi.*

	Libbre	Oncie
La Fojetta piena d' acqua pesa		$9\frac{2}{3}$.
Il Boccale	3	$2\frac{2}{3}$
Rublo	24	2
Congio	25	$9\frac{1}{3}$
Barile	103	$1\frac{1}{3}$
Brenta	326	3
Botte	824	$10\frac{2}{3}$

1618. *Delle Misure vacue di Venezia pei liquidi.*

	Libbre	Oncie
Il Boccale pieno d' acqua pesa	4	$6\frac{2}{3}$
Bozza	4	$10\frac{1}{12}$
Secchio	17	$4\frac{1}{3}$
Mastello	121	$6\frac{2}{3}$

Bi-

	Libbre	Oncie
Bigoncio	243	$\frac{2}{3}$
Anfora	972	2 $\frac{2}{3}$

1619. *Delle Misure vacue di Venezia per gli Aridi.*

	Libbre	Oncie
Il Quartiere pieno di frumento pesa	12	6
Quarta	50	0
Staro	200	0
Sacco	300	0

1620. *Delle Misure vacue di Modena pei liquidi.*

	Libbre	Oncie
Il Boccale pieno d' acqua pesa	3	9 $\frac{5}{11}$
Pinta	7	6 $\frac{10}{11}$
Parolo	28	3 $\frac{10}{11}$
Soglio	169	11 $\frac{5}{11}$
Quartaro	339	10 $\frac{10}{11}$

1621. *Delle Misure vacue di Modena per gli Aridi.*

	Libbre	Oncie
La Quarta piena di frumento pesa	21	2 $\frac{10}{11}$
Mina	84	11 $\frac{8}{11}$
Stajo	169	11 $\frac{5}{11}$
Sacco	339	10 $\frac{10}{11}$

1622. *Delle Misure vacue di Firenze pei liquidi.*

	Libbre	Oncie
Il Fiasco pieno d'acqua pesa	3	2 $\frac{4}{7}$
Barile	64	5 $\frac{3}{7}$
Stajo	193	4 $\frac{2}{7}$

1623. *Delle Misure vacue di Brescia.*

	Libbre	Oncie
Il Boccale pieno d' acqua pesa	6	1 $\frac{1}{30}$
Pinta	12	2 $\frac{1}{15}$

Sec-

	Libbre	Oncie
Secchia	109	$6\frac{3}{5}$
Zerla	438	$2\frac{2}{5}$
Carro	5258	$4\frac{4}{5}$

1624. *Delle Misure vacue di Verona.*

	Libbre	Oncie
L' Inguistara piena d' acqua pesa	3	$6\frac{2}{3}$
Secchia	64	0
Bassa	192	0
Brenta	254	0
Botte	3048	0

1625. *Delle Misure vacue di Vicenza.*

	Libbre	Oncie
Il Gotto pieno d' acqua pesa	1	$3\frac{1}{13}$
Mezza	2	$6\frac{2}{13}$
Inguistara	5	$\frac{4}{13}$
Secchio	90	$3\frac{5}{13}$
Mastello	635	$\frac{10}{13}$
Botte	5064	$7\frac{5}{13}$

1626. *Delle Misure vacue di Bologna per gli Aridi.*

	Libbre	Oncie
Il Quarticino pieno di frumento pesa	1	$8\frac{1}{2}$
Quartirolo	13	8
Quartirola	54	8
Staro	109	4
Corba	218	8
Sacco	656	0

1627. *Delle Misure vacue Francesi pei Liquidi.*

Il Poissons pieno d'acqua pesa		$4\frac{6}{7}$
Chopine	1	$7\frac{3}{7}$
		Pinte

	Libbre	Oncie
Pinte	3	$2\frac{6}{7}$
Quarteau	6	$5\frac{5}{7}$
Septier	25	$10\frac{6}{7}$
Baril	699	$9\frac{5}{7}$
Muid	932	$6\frac{6}{7}$
Pipe	1398	$10\frac{2}{7}$
Tonneau	1797	$8\frac{4}{7}$

1628. *Delle misure vacue Francesi per gli Aridi.*

	Libbre	Oncie
Il Litron pieno di frumento pesa	1	$10\frac{9}{11}$
Demi-Quartier de Boisseau	3	$9\frac{7}{11}$
Quartier de Boisseau	7	$7\frac{3}{11}$
Demi-Boisseau	15	$2\frac{6}{11}$
Boisseau	30	$5\frac{1}{11}$
Minot	91	$3\frac{3}{11}$
Mine	182	$6\frac{6}{11}$
Septier	365	$1\frac{1}{11}$
Muid	4381	$1\frac{1}{11}$

1629 *Delle misure vacue Inglesi per la Cervogia.*

	Libbre	Oncie
Il Pinch pieno d'acqua pesa	1	$7\frac{2}{7}$
Gallon	12	$10\frac{2}{7}$
Firkins	102	$10\frac{2}{7}$
Kild	205	$8\frac{4}{7}$
Baril	411	$5\frac{1}{7}$
Hogshead	822	$10\frac{2}{7}$

1630.

	Libbre	Oncie
1630. *Delle Misure vacue Inglesi per la Birra.*		
Il Pinch pieno d' acqua pesa	2	$1\frac{1}{7}$
Gallon	16	$9\frac{1}{7}$
Firkins	150	$10\frac{2}{7}$
Kild	301	$8\frac{4}{7}$
Baril	603	$5\frac{1}{7}$
Hogsehad	1206	$10\frac{2}{7}$

	Libbre	Oncie
1631. *Delle Misure vacue Inglesi pel Vino.*		
Il Pinch pieno d'acqua pesa	1	$9\frac{2}{3}$
Quart	3	$7\frac{1}{3}$
Pottle	7	$2\frac{2}{3}$
Gallon	14	$5\frac{1}{3}$
Bundlet	260	0
Barrel	455	0
Tierce	606	8
Hogsehad	910	0
Punchion	1213	4
Brett	1820	6
Tun	3640	0

	Libbre	Oncie
1632. *Delle Misure vacue Inglesi per gli Aridi.*		
Il Pinch pieno di frumento pesa	1	$7\frac{10}{11}$
Gallon	13	$3\frac{3}{11}$
Peck	26	$6\frac{6}{11}$
Bushel	106	$2\frac{2}{11}$
Srike	212	$4\frac{4}{11}$
Carnock	424	$8\frac{8}{11}$
Seam	849	$5\frac{5}{11}$
Way	5096	$8\frac{8}{11}$
Last	8494	$6\frac{6}{11}$

1633.

1633. *Delle Misure vacue Olandesi pei Liquidi.*

	Libbre	Oncie
Il Mastias pieno d' acqua pesa		$9\frac{2}{3}$
Pinta	3	$2\frac{2}{3}$
Mengle	6	$5\frac{1}{3}$
Viertel	33	$3\frac{5}{9}$
Stekan	103	$1\frac{1}{3}$
Anker	206	$2\frac{2}{3}$
Awn	412	$6\frac{2}{3}$
Tonellata	2475	4

1634. *Delle Misure vacue Olandesi per gli Aridi.*

	Libbre	Oncie
Il Kops pieno di frumento pesa	4	$\frac{2}{13}$
Vierdevat	16	$1\frac{1}{13}$
Schepel	64	$4\frac{4}{13}$
Mude	257	$5\frac{3}{13}$
Last	6950	$9\frac{3}{13}$

1635. *Delle Misure vacue Spagnuole pei Liquidi.*

	Libbre	Oncie
La Quarta piena d' acqua pesa	3	$10\frac{2}{7}$
Azumbras	15	$5\frac{1}{7}$
Robas	125	$5\frac{1}{7}$
Botte	3762	$10\frac{2}{7}$

1636. *Delle Misure vacue Spagnuole per gli Aridi.*

	Libbre	Oncie
L' Anegras pieno di frumento pesa	192	$8\frac{3}{5}$
Cahi	2312	$7\frac{1}{5}$
Fanegas	9250	$4\frac{4}{5}$

1637.

1637. *Delle Misure vacue Portoghesi pei Liquidi.*

	Libbre	Oncie
La Quartas piena d' acqua pesa	1	7 2/7
Cavedos	6	5 1/7
Alquier	38	6 6/7
Almunde	77	1 5/7
Botte	1979	8 4/7

1638. *Delle Misure vacue Portoghesi per gli Aridi.*

L' Alquier pieno di Frumento pesa	29	9 2/13
Fanegas	119	12/13
Moggio	1786	1 11/13

1639. *Altre Misure vacue pei Liquidi di diversi Paesi.*

La Demi-Queue a Rouen piena d' acqua pesa	2152	6
Demi-Queue di Sciampagna	636	5
Queue d' Orleans	1435	0
Botte d' Orleans	1913	4
Pinte di S. Dionigi	6	5 2/21
Pipe nell' Anjou, e nel Poetù	1435	0
Migliarolle di Provenza	216	0
Poincon di Nantes	887	5 1/2
Botte d' Amsterdam per l' Olio	5314	10
Viertel d' Amsterdam pel Vino	39	9
Botte di Bajona	2870	0
Barique di Bourdeaux	1541	4
Salma di Calabria	1062	8
Feoder di Heidelberga	1009	10
Moggio di Linguadocca	278	11
Tonellata di Malaga	1009	10
Staro di Calabria	106	4
Feoder di Norimberga	1009	10
Conca di Bajona	252	4 3/4
Canan di Sian	6	5 2/21
Lenig di Sian	1	7 2/7

Veg-

	Libbre	Oncie
Veggia d'Argentina	3860	$\frac{1}{4}$
Brenta di Crema	139	2
Botte d'Alicante	3879	10
Pipe d'Alicante	2325	$10\frac{1}{3}$
Pignatoli di Calabria	3	$2\frac{4}{7}$

1640. *Miſure vacue per gli Aridi di diverſi Paeſi.*

	Libbre	Oncie
Boiſſeau d'Amboiſe pieno di Frumento peſa	1	5
Boiſſeau di Blois		$10\frac{4}{9}$
Boiſſeau di Bourdeaux	8	$6\frac{7}{9}$
Boiſſeau d'Avignon	2	$7\frac{1}{3}$
Boiſſeau della Roccella	10	$3\frac{7}{9}$
Mine a Rouen	121	$10\frac{2}{9}$
Mine a Dieppe	192	$11\frac{1}{9}$
Moggio d'Orleans	913	$8\frac{2}{3}$
Septier a Rouen	365	$5\frac{1}{3}$
Septier di Tolon	182	$8\frac{2}{3}$
Chaldron di Londra	3828	$11\frac{5}{9}$
Laſt di Polonia	7311	$1\frac{1}{3}$
Laſt di Pruſſia	48518	$10\frac{2}{3}$
Chefford di Moſcovia	60	1
Viertel d'Anverſa	213	8
Scheppel, o Scheffel d'Hamburg	77	2
Laſt d'Hamburg	7524	$3\frac{5}{9}$
Seſtiere d'Amiens	76	2
Laſt d'Anverſa	6945	8
Fanegos di Cadice, e di S. Sebaſtiano	114	1

Sac

	Libbre	Oncie
Sac di Dordrecht	289	4 $\frac{7}{9}$
Sac di Leyden	157	9 $\frac{2}{3}$
Sestiere di Liegi	72	4
Mude di Louvain	257	2 $\frac{2}{3}$
Carica ei Marsiglia	385	10 $\frac{1}{3}$
Sestiere di Montpellier	128	7 $\frac{4}{9}$
Tonneau di Nantes	7128	4
Carro di Napoli	60	1
Salma di Palermo	666	0
Tonneau della Roccella	3303	6
Sac di Roterdam	239	5 $\frac{1}{3}$
Muid di Rouen	5117	9 $\frac{1}{3}$
Carica di Toulon	1096	8
Stajo di Livorno	61	6
Stajo di Lucca	58	4
Tomolo di Napoli	121	10 $\frac{2}{9}$
Queue di Borgogna	6580	0
Botte di Brest	3655	6 $\frac{2}{3}$
Tonne di Coppenhaghen	162	0
Sacco di Crema	486	10 $\frac{1}{3}$
Last di Danzica	698	5 $\frac{2}{3}$
Baziere di Dunkerque	385	10 $\frac{1}{3}$
Mudde di Francfort	260	2 $\frac{2}{3}$
Carica di Genova	282	2
Sacco di Granata	232	9 $\frac{1}{3}$
Sac di Harlem	182	9 $\frac{1}{3}$
Quarteau d' Irlanda	679	8 $\frac{2}{3}$

Asnée

	Libbre	Oncie
Asnée di Lione	484	11 $\frac{1}{3}$
Scheppel di Lubecca	73	0
Carica di Marsiglia	385	6 $\frac{2}{3}$
Sac di Middelburg	163	6 $\frac{2}{3}$
Mouver di Nimega	319	2
Septier di Narbona	262	9 $\frac{2}{3}$
Loopen di Riga	142	4 $\frac{2}{3}$
Stajo di Sardegna	121	10 $\frac{2}{9}$
Tonne di Stokolm	303	2
Sacco di Valenza	227	9 $\frac{1}{3}$
Mudda di Utrecht	282	2
Last d'Amsterdam per la Marina	5856	10 $\frac{2}{3}$
Piquet d' Amiens	19	3 $\frac{2}{7}$
Tomolo di Palermo	41	8
Mondili di Palermo	10	5

FINE DEL PRIMO TOMO.

ERRORI.			CORREZIONI.
Pag.	lin.		
x.	22.	(e quefto fatale periodo che	e quefto fatale pericdo (che
xiiij.	26	accuiffe	acuifce
5	14	quantunqne	quantunque
8	36	finalmeute	finalmente
56	23	pel denomin atore 2015434710, foldi	pel denominatore, 2015434710 foldi
64	23	248	348
128	15	dimenfione	dimenfioni
245	4	ii	il
285	2	Piede di Roma ful monumento di Villalpando	Piede Romano di Villalpando
291	8	La Poles contiene $\frac{1}{4}$ Yard	La Poles contiene 30 $\frac{1}{4}$ Yard
295	8	Cauthum	Cuathum
302	2	La Quarta	La Mina